תקציר מאמר:

<u>שיטה גרפית לפתרון בעיות בליסטיקה</u>

בעיות הבליסטיקה הנלמדות בקורס פיסיקה בסיסי (קינמאטיקה) עוסקות במציאת זווית הירי של תותח המוצב בנקודה נתונה, ויורה קליע במהירות לוע נתונה לעבר מטרה נתונה. נדרש לחשב את זווית ההגבהה של הקנה. לצורך החישוב ניתן להזניח השפעת גורמים אווירודינמיים.

הדרך המקובלת לפתור בעיה זו מתבססת על פתרון מערכת משואות התנועה בציר האופקי ובציר האנכי. מתקבלת משואה ריבועית, שלה: לא קיים פתרון אם המטרה מחוץ לטווח, קיים פתרון יחיד בטווח המכסימלי, או קיימים שני פתרונות (מסלול שטוח ומסלול תלול) בכל מקרה אחר.

המחבר פיתח דרך פיתרון אלטרנטיבית: דרך גראפית, הדורשת מחוגה וסרגל. הפתרון מתקבל ע"י מציאת נקודות החיתוך של שני מעגלים.

טכניקת הפתרון מהירה ופשוטה, ולכן אטרקטיבית. התובנות הפיסיקליות המתקבלות מן השימוש בפתרון:

- זיהוי הקבוע הפיסיקלי החשוב של הבעיה (היחס בין ריבוע מהירות הלוע לתאוצת הכובד)
- טיפול בהפרשי גובה בין התותח ליעד ע"י המרת אנרגיה פוטנציאלית לאנרגיה קינטית
- המחשה ויזואלית מיידית של המצבים בהם אין פתרון, יש פתרון יחיד, או ישנם שני פתרונות

במהלך פיתוח הפתרון נעשה שימוש במושג "מקום גיאומטרי" , בטריגונומטריה, בגיאומטריה אנליטית ובמציאת מקסימום ע"י נגזרת. כל הכלים המתמטיים מוכרים, ומקור עוצמתה של דרך הפתרון הוא בשילובם.

המאמר מציג בהרחבה את הבעיה, פיתוח הפתרון, והוראות תמציתיות לשימוש בשיטה.
בנוסף למאמר מובא דיון על ערכה הדידקטי של השיטה המוצגת, כמקרה פרטי של שימוש בשיטות גראפיות ושילוב של טכניקות מתמטיות שונות כאמצעי להעמקת הידע ורכישת תובנות.

שיטה גרפית לפתרון בעיות בליסטיקה

נתונה הבעיה הבאה: תותח הממוקם בנקודה $(x=0,h=0)$ יורה קליע לעבר מטרה הנמצאת באותו גובה, בנקודה $(x=x_t, h=0)$. מהירות היציאה של הקליע נתונה כ- v_0. נדרש למצוא את זווית ההגבהה θ שתבטיח פגיעה במטרה. נזניח, לצורך הפתרון, את השפעת האוויר (גרר ועילוי) וסיבוב כדור הארץ – נניח שהירי מתבצע בריק, במערכת אינרציאלית. המשתנה x מציין העתק, המשתנה h מציין גובה.

דרך הפתרון מתבססת על השיטה הבאה:

1. נמצא את המקום הגיאומטרי של כל נקודות השיא של המסלולים הבליסטיים האפשריים עבור התותח הנתון, עבור כל ערך של θ.
2. נמצא את המקום הגיאומטרי של כל נקודות השיא של המסלולים הבליסטיים האפשריים עבור פגיעה במטרה, מכל מיקום אפשרי של התותח לאורך ציר x וזוית θ המתאימה למיקום.
3. החיתוך בין שתי העקומות הנ"ל יספק את הפתרונות.

בשלב זה, לפני מציאת העקומות המציינות את המקומות הגיאומטריים המבוקשים, ניתן לומר:

- העקומות תהיינה זהות עבור התותח והמטרה, משום שמהירות היציאה זהה למהירות הפגז בעת הפגיעה; זאת, משום שאנו מניחים שאנרגיית הפגז נשמרת, והתותח והמטרה נמצאים באותו גובה.
- העקומה המציינת את המקום הגיאומטרי תהיה סימטרית ביחס לציר h.
- בהמשך נבקש להרחיב את הפתרון למקרים שבהם קיים הפרש גבהים בין התותח והמטרה.

פיתוח הפתרון:

נרשום את משוואות התנועה בצירים x ו- h.

$$x=v_0\cos(\theta)\, t$$

$$h= v_0\sin(\theta)t- gt^2/2$$

כידוע, משוואות אלה מתארות משפחה של פרבולות, עם θ כפרמטר.

נתאר משפחה זו ע"י אוסף נקודות המקסימום של הפרבולות, שהן שיאי המסלולים הבליסטיים.

הערכים t^*, x^*, h^* מציינים את הזמן ואת הקואורדינאטות של נקודות השיא.

מתקיים:

$dh/dt = v_0\sin(\theta) - gt$

הנגזרת מתאפסת בשיא המסלול, ומתקבל:

$t^* = v_0\sin(\theta)/g$

(1.1) $x^* = v_0\cos(\theta)\ t^* = v_0\cos(\theta)\ v_0\sin(\theta)/g = v_0^2/g\ \cos(\theta)\sin(\theta) = v_0^2/(2g)\ \sin(2\theta)$

(1.2) $h^* = v_0^2/g\ \sin^2(\theta) - v_0^2/(2g)\ \sin^2(\theta) = v_0^2/(2g)\sin^2(\theta) = v_0^2/(4g)\ (1-\cos(2\theta))$

בחישובים אלה עשינו שימוש בזהויות הטריגונומטריות:

$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

$\cos(2\theta) = 1-2\sin^2(\theta)$

אחרי טיפול נוסף במשואות (1.1),(1.2) מקבלים:

(2.1) $1-(4g/v_0^2)\ h^* = \cos(2\theta)$

(2.2) $(2g/v_0^2)\ x^* = \sin(2\theta)$

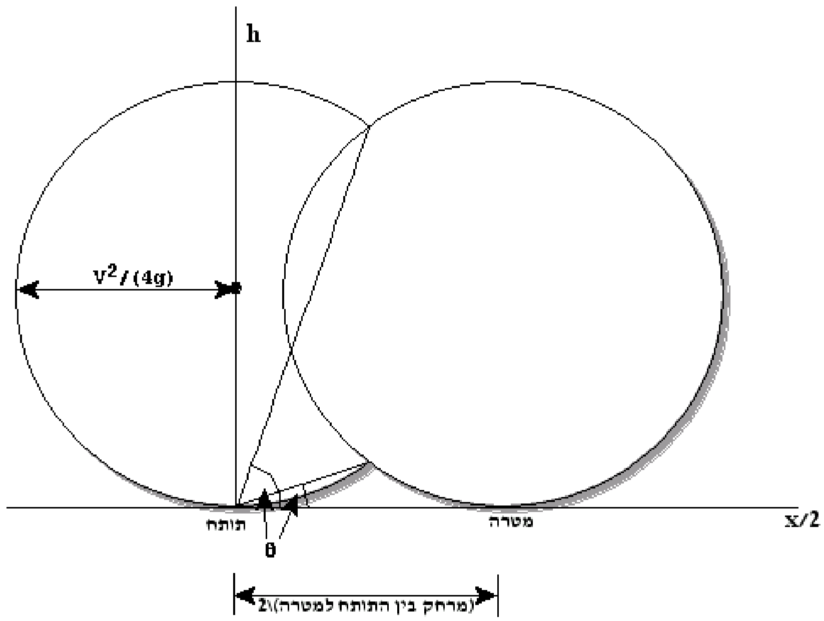
תוך שימוש בזהות הטריגונומטרית $\sin^2(2\theta)+\cos^2(2\theta) = 1$ נמשיך את הפיתוח:

$((2g/v_0^2)\ x^*)^2 + ((4g/v_0^2)\ h^*-1)^2 = 1$

ולבסוף מתקבלת המשואה הבאה:

(3) $(x^*/2)^2 + (h^* - v_0^2/(4g))^2 = (v_0^2/(4g))^2$

זוהי משוואה של מעגל, במערכת הצירים של המשתנים h^*, $x^*/2$. מרכז המעגל בנקודה $(0, v_0^2/(4g))$
ורדיוסו אף הוא שווה ל- $v_0^2/(4g)$.



קביעת זוית הירי באופן גרפי עבור תותח ומטרה שווי גובה

בשרטוט מובאים שני מעגלים: המעגל השמאלי מתאים לתותח, מרכזו בנקודה $(x^*/2=0,\ h^*=v_0^2/(4g))$ ורדיוסו $v_0^2/(4g)$. המעגל הימני מתאים למטרה, מרכזו בנקודה $(x^*/2=x_t/2\ ,\ h^*=v_0^2/(4g))$. רדיוסו שווה לרדיוס המעגל הקודם.

שני המעגלים נחתכים בשתי נקודות, שהן נקודות השיא של שני מסלולים בליסטיים מן התותח אל המטרה (מסלול תחתי ומסלול עילי). הקטעים שבין נקודת ההשקה של המעגל השמאלי עם הציר $x_t/2$ לבין נקודות החיתוך של המעגלים יוצרים עם הציר $x/2$ את הזויות θ_1 , θ_2, שהן זויות ההגבהה עבור המסלול התחתי והמסלול העילי. הזזת המטרה ימינה תביא בנקודה מסוימת להשקה של שני המעגלים. זהו המצב המתאים לירי לטווח המירבי, וזוית הירי המתאימה היא 45°. הזזה נוספת תיצור מצב שבו שני המעגלים אינם נחתכים. במצב זה המטרה נמצאת מחוץ לטווח.

קוטר המעגל הוא $v_0^2/(2g)$. ערך זה מוכר מן הקשר $v_0^2 = 2\ gh$. ואכן, ירי בזוית ישרה כלפי מעלה יביא את הפגז לגובה $v_0^2/(2g)$, כצפוי.

<u>הערות גיאומטריות:</u>

1. כל אחת מן הזויות θ_1 , θ_2 הינה זוית בין משיק ומיתר, ולכן שווה לזוית ההיקפית הנשענת על המיתר. הזויות המרכזיות הנשענות על המיתר הן $2\theta_1$, $2\theta_2$ בהתאמה – אלו הן הזויות 2θ המופיעות במשואות 2.1 ו-2.2
2. בכל שרטוטי המעגלים המופיעים במאמר, זויות הירי הן נכונות, אך להצגה נכונה של מקומי המטרה ושיאי הגובה יש להכפיל את המרחקים מן התותח אל נקודות שיאי המסלול ואל המטרה.

כיצד נטפל במקרים, שבהם התותח והמטרה אינם נמצאים באותו גובה?

הפרש הגבהים מתבטא בהפרש בין ערכי האנרגיה הפוטנציאלית במקום התותח ובמקום המטרה. אם המטרה גבוהה מן התותח, ברגע הפגיעה תהיה האנרגיה הפוטנציאלית של הקליע בנקודת הפגיעה גדולה ב-$mg\Delta h$ מן האנרגיה הפוטנציאלית בתותח, ומכאן, שהאנרגיה הקינטית בנקודת הפגיעה תהיה קטנה באותו שיעור. באופן דומה, אם המטרה ממוקמת נמוך יותר –תהיה האנרגיה הקינטית של הפגז במטרה גבוהה יותר.

נסמן את מהירות הקליע בנקודת המטרה ב v_t. ע"פ חוק שימור האנרגיה, מתקיימת המשואה הבאה:

$$(4)\quad mv_t^2/2 = mv_0^2/2 - mg\,\Delta h$$

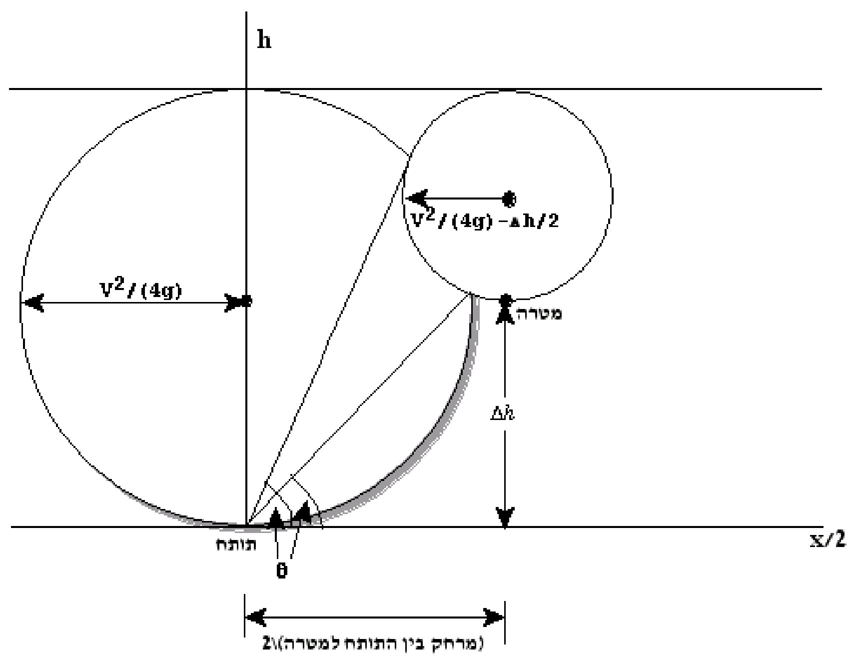
במשואה זו Δh חיובי עבור מטרה גבוהה, $g=9.8$.

ממשואה (4) נקבל:

$$(5)\ r_t = v_t^2/(4g)) = v_0^2/(4g)) - \Delta h/2$$

כלומר: רדיוס המעגל r_t המתאים למטרה יקטן בשיעור של $\Delta h/2$ מרדיוס המעגל המתאים לתותח. שיאם של שני המעגלים נמצא באותו גובה.

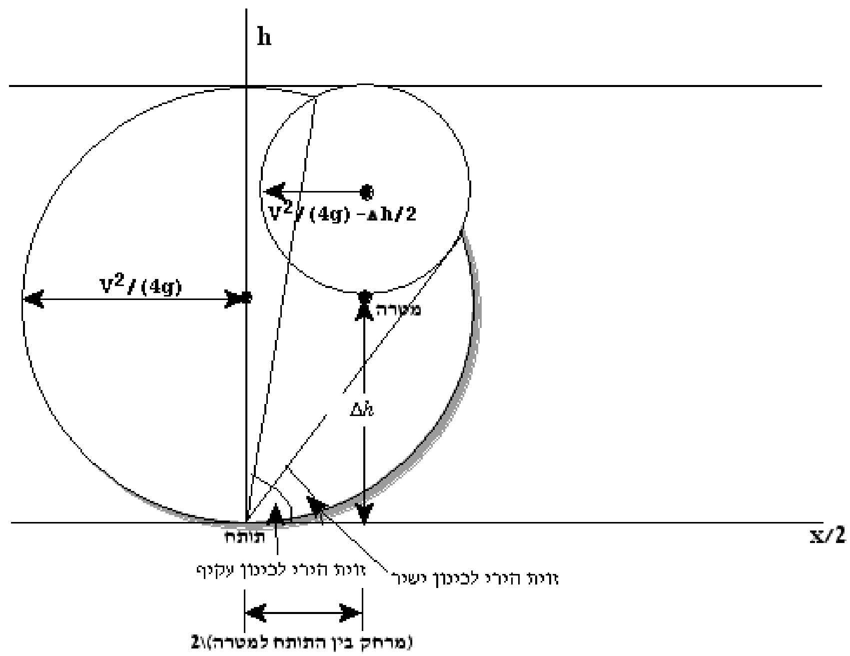
השרטוט הבא מתאר את המקרה בו התותח והמטרה נמצאים בשני גבהים שונים.



קביעת זוית הירי באופן גרפי עבור תותח ומטרה שוני גובה

המקרה האחרון בו נדון הינו **ירי בכינון ישיר.** במקרה זה פוגע הקליע במטרה הנמצאת <u>לפני</u> שיא גובהו של המסלול, בניגוד למקרים הקודמים שבהם שיא המסלול נמצא בין התותח למטרה. במקרה זה נקבל שתי נקודות חיתוך בין המעגלים המתאימים. הנקודה התחתונה מתאימה לכנון ישיר, והזוית אליה היא זוית הירי. הנקודה העליונה מתאימה לכנון עקיף, כלומר, הפגיעה במטרה תהיה בירידה של הקליע משיא הגובה.

מקרה זה מתואר בשרטוט הבא:



קביעת זוית הירי באופן גרפי עבור תותח ומטרה בכינון ישיר

לסיכום, נביא בקצרה את התהליך לחישוב זוית הירי.

<u>תהליך החישוב</u>

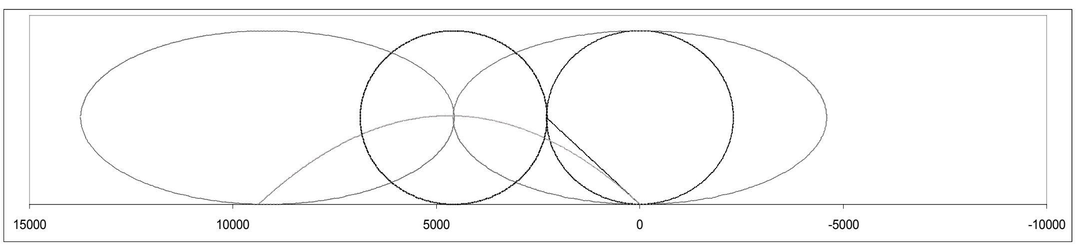
1. נסמן במערכת הצירים x/2 , h, את מיקום התותח בנקודה (x/2=0, h=0) ואת מיקום המטרה בנקודה $(x/2 = x_t/2, h=\Delta h)$. (יש לשים לב: מרחק המטרה מחולק ב-2!)
2. נתווה מעל מיקום התותח מעגל שמרכזו בנקודה $(x/2=0, h = v_0^2/(4g))$, ורדיוסו $v_0^2/(4g)$
3. נחשב, או נקבע גיאומטרית, את רדיוס המעגל r_t המתאים למטרה ע"פ משואה (5)
4. נתווה מעל מקום המטרה מעגל שמרכזו ב- $(x/2 = x_t/2, h=\Delta h + r_t)$ ורדיוסו r_t.
5. אם שני המעגלים אינם נחתכים –המטרה מחוץ לטווח; אם שני המעגלים משיקים – המטרה נמצאת בקצה הטווח, וקיים מסלול ירי יחיד; אם שני המעגלים נחתכים – קיימים שני מסלולי ירי – שטוח ותלול.
6. זויות הירי נתונות ע"י הזויות בין ציר x לבין המיתר מתחתית המעגל לנקודות החיתוך של המעגלים.
7. אם המטרה נמצאת בתוך מעגל התותח, הזוית התחתונה מתאימה לכינון ישיר, העליונה לכינון עקיף.

רגע אחד.... לאן נעלמה הפרבולה?

הפרבולה לא נעלמה. זה המקום לקשור מחדש את הבליסטיקה המוכרת מבית הספר ואת פרבולת המסלול למה שהוצג עד כאן במאמר. נתבונן בשרטוט:

התותח יורה אל מטרה הנמצאת בקצה הטווח שלו – ולכן זווית הירי היא בת 45 מעלות. מסלול הקליע מותווה על ידי פרבולה. במערכת צירים שבה ציר ה-X מתאים למרחק, נקבל אליפסה עבור המקום הגיאומטרי של שיאי הפרבולות המתאימות לזוויות ירי שונות. ואכן, בדוגמה שבשרטוט מתלכד שיא הפרבולה עם נקודת ההשקה של האליפסות, המשיקות לציר ה-X בנקודות המצאות התותח והמטרה בהתאמה.

אליפסות אינן נוחות לשרטוט – עדיף להשתמש במעגלים. אם נשתמש בציר X כדי להביע את מחצית המרחק, במקום את המרחק עצמו – נוכל להשתמש במעגלים. בדוגמה ניתן לראות, כי הרדיוס הקטן של האליפסה שווה לרדיוס המעגל, בעוד הרדיוס הגדול שלה כפול מרדיוס המעגל. את זווית הירי קבלנו באופן גיאומטרי באמצעות המיתר שבין מיקום התותח לנקודת ההשקה של המעגלים. לפתרון הבעיה בה עסקנו במאמר – מציאת זווית הירי – אין צורך בהתוויית האליפסות והפרבולה.



מטרה תותח

נספח

ערכה הדידקטי של השיטה

במאמר זה הוצגה שיטה גראפית לפתרון בעיה "ותיקה" בתוכנית לימודי הפיסיקה בתיכון. להערכת ערכה הלימודי מתבקשות השאלות: האם השיטה מציעה ערך מוסף ללומד, תובנות נוספות, פתיחת אופקים חדשים? האם ניתן ללמד את השיטה במספר רמות, בהתאם לרמת התלמידים? האם השיטה מקצרת את משך הלימוד? האם היא מקלה על זכירת החומר הנלמד? האם היא מקלה על התמודדות עם שאלות נוספות? האם ניתן להרחיבה כדי לאפשר התמודדות עם בעיות אמיתיות ללא הקלות כגון: התעלמות מן האטמוספרה?

בשלב זה התשובות לשאלות אלה אינן מבוססות על ניסיון בפועל עם תלמידים, אלא על משוב שקבל המחבר ממורים עמיתים.

- **ערך מוסף ללומד**

הוראת השיטה כוללת בתחום המתמטיקה מרכיבים של אלגברה, חדו"א (שימוש בנגזרת למציאת שיא המסלול), גיאומטריה (מעגלים, מיתרים ומשיקים), טריגונומטריה (שימוש בזהויות טריגונומטריות) וגיאומטריה אנליטית (משואת מעגל, משואת אליפסה). בתחום הפיסיקה כוללת הוראת השיטה את משואות התנועה, שימוש בשיקולי סימטריה (גם לתותח וגם למטרה מתאימים מעגלים), ושיקולי אנרגיה (עליהם מבוססת קביעת הרדיוסים במקרים של הפרשי גובה בין התותח למטרה). מתוך כך מספק לימוד השיטה כולה חזרה והעמקה במגוון נושאים תוך שילובם. השילוב וההעמקה בנושאים השונים מהווים ערך מוסף החורג מפתרון גרידא של בעיית הבליסטיקה.

- **תובנות נוספות**

התובנה הפיסיקלית העיקרית מופקת מן העובדה שהמעגלים מוגדרים ע"י שני ערכים פיסיקליים: $v_0^2/(4g)$, קבוע המגדיר את מרכז המעגל ורדיוסו, וכן Δh , המשפיע על שני פרמטרים אלה עבור מעגל המטרה. קבועים אלה, יחד עם המרחק בין התותח אל המטרה מגדירים לחלוטין את הבעיה. שני הקבועים ניתנים להגדרה במונחים של אנרגיה קינטית ואנרגיה פוטנציאלית, ומהם ניתן בקלות לגזור תשובות על שאלות נוספות, כגון: פי כמה יגדל הטווח המרבי אם תוכפל מהירות הלוע? באיזו מידה ישתנה טווח זה על פני כדור הארץ כפונקציה של קו הרוחב והגובה, בהנתן תלות תאוצת הכובד בגורמים אלה ? (ראה מאמר באתר של אוניברסיטת מלבורן, אוסטרליה: (http://www.earthsci.unimelb.edu.au/ES304/MODULES/GRAV/NOTES/latitude.html .
השימוש במושג האנרגיה מאפשר לפתור בעיות רבות בפיסיקה, והביטוי לאנרגיה הפוטנציאלית מהווה במקרים רבים הגדרה של הבעיה הפיסיקלית גם במכאניקה הקלאסית וגם במכאניקת הקוונטים.

- **פתיחת אופקים חדשים**

ניתן להשתמש בשיטה המוצגת כדוגמה לשילוב של שיטות מתמטיות ושיקולים פיסיקליים לפתרון בעיות נוספות. ניתן להציג את נושא ה-"חתכים הקוניים" בעקבות קבלת מעגל ואליפסה ע"י טרנספורמציה של בעיה הכוללת במקורה פרבולות. ניתן לחשוף את התלמידים לשיטות חישוב גרפי, כגון נומוגרמות. נושאים אלה, שאינם נלמדים בד"כ בתוכנית הלימודים הרגילה עשויים להילמד במסגרת עבודות ופרויקטים מיוחדים.

- **לימוד במספר רמות**

ברמה הנמוכה ביותר ניתן ללמד את השיטה במתכונת של "ספר בישול" – הוראות כיצד יש לשרטט את המעגלים ולפרש את נקודות החיתוך. ברמה גבוהה יותר ניתן לעבור בצורה מלאה על ההוכחה ולדרוש מן התלמידים בקיאות בכל מרכיבי הפיתוח ושילובם. ברמה הגבוהה ביותר, במסגרת פרויקט מונחה מורחב, ניתן לבקש הרחבה של השיטה כך שתיקח בחשבון את השפעת החיכוך באטמוספרה.

- **קיצור משך הלימוד והקלת הזכירה**

המחבר סבור שההמחשה הויזואלית הטמונה בשיטה עשויה לקצר את משך הלימוד ולהקל על הזכירה. נקודה זו לא נבדקה בפועל, אך ניסיון שנצבר בשיטות אחרות המתבססות על חישוב גרפי, מוביל להשערה שהשיטה תאפשר את קיצור משך הלימוד ותקל את הזכירה. דיאגראמת סמית המוכרת להנדסאי אלקטרוניקה הלומדים "מיקרוגלים ואנטנות" מוכיחה את כוחה של הצגה חזותית זה למעלה מ-60 שנה.

- **הרחבת הבעיה ופתרונה**

ניתן להרחיב את הבעיה כך, שתילקח בחשבון השפעת התנגדות האוויר. הרחבה זו תבוא לידי ביטוי בהחלפת המעגלים בעקומות אחרות. גם אם לא ניתן להגיע לפתרון אנליטי פשוט עבור הבעיה המורחבת, ניתן לחשב את העקומות באמצעות תוכניות מחשב.

סיכום

ערכה של השיטה המובאת במאמר אינו בהיותה דרך חלופית לפתרון בעיה ידועה ומוכרת, אלא בתרומותיה ללימוד הפיסיקה והמתמטיקה. הלומד רוכש באמצעותה ערך מוסף ותובנות מתמטיות ופיסיקליות, המורה עשוי לבחור הרחבות לעבר תחומים נוספים בתחומי המתמטיקה והחישוב הגראפי, וכן ללמד את השיטה ברמת העמקה מותאמת לרמת התלמידים. נראה, כי אופייה החזותי של השיטה מקצר את משך הלימוד והזכירה. נראה גם, כי ניתן להשתמש בעיקריה של השיטה גם בבעיה המורחבת , המתחשבת בהתנגדות האוויר.

---

[i] רון גולדרינג , בוגר הטכניון בפיסיקה, מהנדס תוכנה ובעל תואר שני במערכות מידע מאוניברסיטת ת"א, מפתח, מנתח מערכות, חוקר עצמאי ועוסק בחדשנות זה כ-30 שנה. במסגרת עיסוקו בהוראה לימד מקצועות בתחום מדעי המחשב, בטכניון ובמספר מכללות, וכן מתמטיקה ופיסיקה במספר מכללות בארץ