שלמה מלמן[1]

מכניקה - קינמטיקה

חוברת עזר בפיסיקה

לתלמידי בי"ס תיכון - במגמה הריאלית

[1] לימד בתיכון בת"א במשך 10 שנים ולאחר מכן עבר להיי-טק בתחום של מערכות מדעיות ממוחשבות. כעת גימלאי שמסייע לנכדותיו להבין את המשמעויות בלימוד חשבון , מתמטיקה ופיסיקה.
חוברת זו נולדה בעקבות שאלות של הנכדה הלומדת בתיכון במגמה המדעית.

מטרתה של חוברת זו, להקנות לתלמיד התיכון המתחיל את צעדיו הראשונים בפיסיקה, הבנה בעקרונות יסודיים ובסיסיים בלימוד פיסיקה.
מנסיוני, רבים מהתלמידים "לומדים" פיסיקה דרך נוסחאות מתמטיות ומבלי להבין את משמעותם הפיסיקלית, לכן שמתי דגש מיוחד על הסברים מפורטים ובהירים בכל הדוגמאות שבחוברת, כאשר הנוסחאות המתמטיות הן רק כלי עזר, ובתקוה כי הסברים ודוגמאות אלו יעמיקו את הבנתו ויעוררו בו רצון להרחיב ולהעמיק את לימודיו בתחום המדע והטכנולוגיה.
התפתחות בתחום זה תבטיח, לדעתי, את עתידנו במדינה.

אם חוברת זו תתרום , ולו במעט, לעורר סקרנות והתענינות למספר רב יותר של תלמידים, אשר יפנו לתחום זה, והיה זה שכרי.

שלמה מלמן - 2008

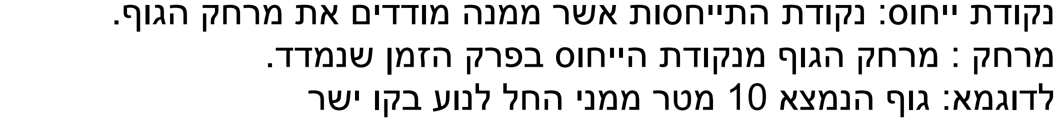
תוכן הענינים

מבוא

קינמטיקה הוא פרק מתחום המכניקה הקלאסית ועוסק בחקר התנועה של גוף במרחב.
עקב תנועת הגוף, הוא משנה את מקומו במרחב ועובר מרחק כלשהוא מנקודת המוצא, המרחק שעבר הוא ההעתק.
את ההעתק, הוא עבר בפרק זמן מסוים, מכאן שיש לנו שני משתנים העתק וזמן.
יחידות המדידה הבסיסיות בפיסיקה הן של : מרחק, מסה וזמן.

כל שאר היחידות נגזרות מיחידות בסיסיות אלו.
נהוג למדוד יחידות אלו ב:
מרחק = מטרים, מסה = קילוגרמים וזמן = שניות או
מרחק =סנטימטרים, מסה = גרמים וזמן = שניות
ומציינים אותן m,k,s או c,g,s בהתאמה.

בכל הנוסחאות והמשוואות שתשתמשו הקפידו על אחידות והתאמה של היחידות.
בקינמטיקה אנו נשתמש ביחידות מדידה של מרחק (העתק) וזמן.
תנועה של גוף במרחב מאופינת על ידי נקודת המוצא, נקודת ייחוס,
כיוון התנועה, המרחק שעבר והזמן בו היה הגוף בתנועה.
נקודת מוצא: מיקומו של הגוף ברגע תחילת מדידת הזמן.
נקודת ייחוס: נקודת התייחסות אשר ממנה מודדים את מרחק הגוף.
מרחק : מרחק הגוף מנקודת הייחוס בפרק הזמן שנמדד.
לדוגמא: גוף הנמצא 10 מטר ממני החל לנוע בקו ישר

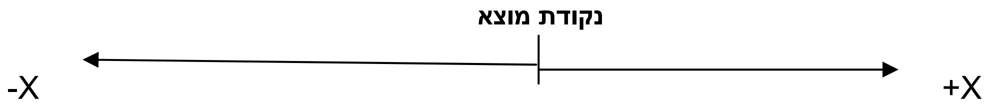


נקודת הייחוס זה ה- 0 ונקודת המוצא זה ה- 10 .
הקו המלא הוא ההעתק שהגוף עבר בפרק הזמן והקו המקוקו הוא המרחק.

גדלים פיזיקלים אשר יש משמעות לכיוון נקראים ווקטור ומסומנים עם חץ מעליהם לדוגמא: מרחק $\vec{X}$ או מהירות $\vec{V}$ או כוח $\vec{F}$.

גדלים פיזיקליים שאין חשיבות לכיוון נקראים סקלר לדוגמא:
זמן t , מסה m ,אנרגיה E וכד'.

גוף הנע לכוון מסוים אנו נחליט מהו הכיוון החיובי בסימן + והכיוון השלילי בסימן - . נתאים זאת למערכת המתמטית ונקבע תנועה על ציר X ימינה חיובית + ותנועה שמאלה תהיה שלילית - .



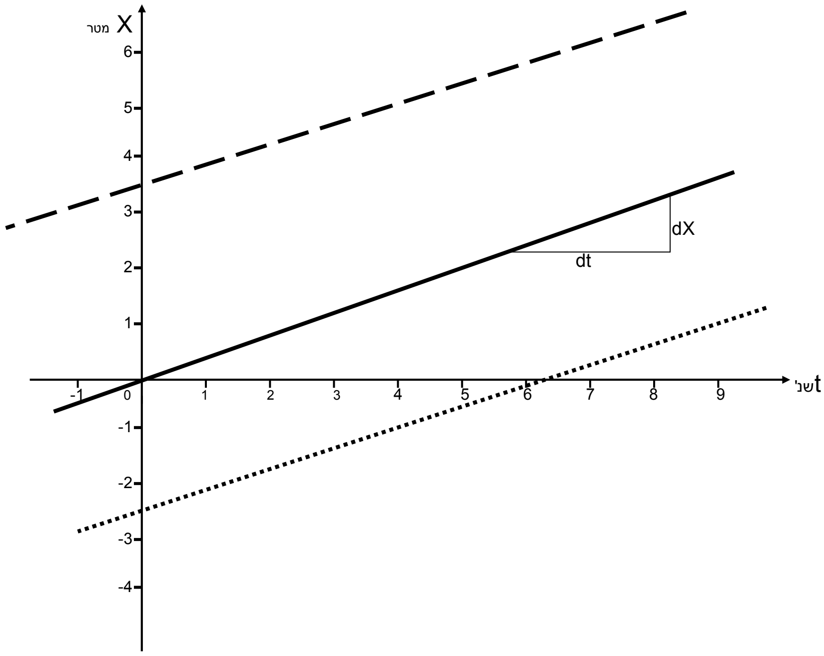
ההעתק הוא המרחק של הגוף מנקודת המוצא, כלומר אם הגוף נע שמאלה ואח"כ ימינה וחזר לאותה נקודה ההעתק שהגוף עבר בזמן הנמדד הוא אפס.

מהירות של גוף היא ההעתק שהגוף עובר ביחידת זמן ומסומן בV $V=\frac{dX}{dt}$

כאשר dX הוא ההעתק שהגוף עבר בפרק הזמן dt .
קיימות מספר תנועות : תנועה קצובה (שוות מהירות), תנועה שוות תאוצה, תנועה אופקית ואנכית, תנועה משופעת, תנועה מעגלית ועוד.

תנועה קצובה (תנועה שוות מהירות)

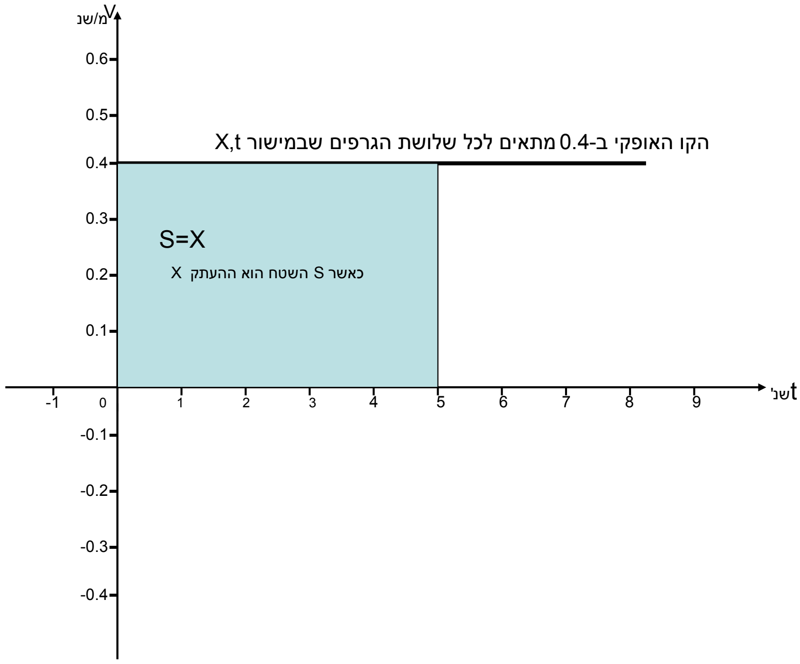
אנו נתייחס לתנועה לאורך קו ישר.
תנועת הגוף במהירות שווה במשך **כל** הזמן: $V=\frac{dX}{dt}$ קבוע
כלומר הגוף נע באותו קצב מתחילת המדידה ועד לסיומה.
יחידות המהירות הן: $\frac{\text{מטר}}{\text{שניה}}$ או $\frac{\text{ס"מ}}{\text{שניה}}$ כמובן אפשר גם $\frac{\text{ק"מ}}{\text{שעה}}$ ואז רצוי להפוך כך שכל היחידות יתואמו.
בתנועה קצובה ההעתק שהגוף עובר הוא $x=v*t$ לדוגמא אם גוף נע ימינה במהירות קבועה של 5 $\frac{\text{מ}}{\text{שנ}}$ הרי שכעבור 10 שנ' המרחק יהיה 5*10 שהם 50 מטר.
נסתכל על הגרף של תנועה קצובה במישור X,t



תנועה קצובה מאופינת ע"י קו ישר משופע. אם נתבונן על הקו הרציף נראה שברגע תחילת המדידה $t=0$ הגוף היה במרחק 0 וב 5 שניות הוא עבר 2 מטר כלומר המהירות של הגוף היא 0.4 $\frac{מ}{שנ}$ וכעבור 20 שניות מרחקו מהראשית (שהיא גם נקודת המוצא) תהיה 8 מטר.
הנוסחא הזו $X=V*t$ היא בעצם משוואה מתמטית.
אם נסתכל על הגרפים נראה שכל אחד מהקוים מתאר תנועה קצובה זהה לכולם, רק שהקו המקוקו העליון מצביע שהגוף היה במרחק 3.5 מ' ברגע שהתחלתי למדוד זמן ולכן אם נרצה לדעת מה מרחקו של הגוף כעבור 5 שניות מנקודת הייחוס (הראשית), עלינו להוסיף את המרחק ההתחלי ואז נוכל לרשום: $X=0.4*5+3.5$
ומכאן נקבל את הנוסחא הכללית למציאת המרחק בתנועה קצובה

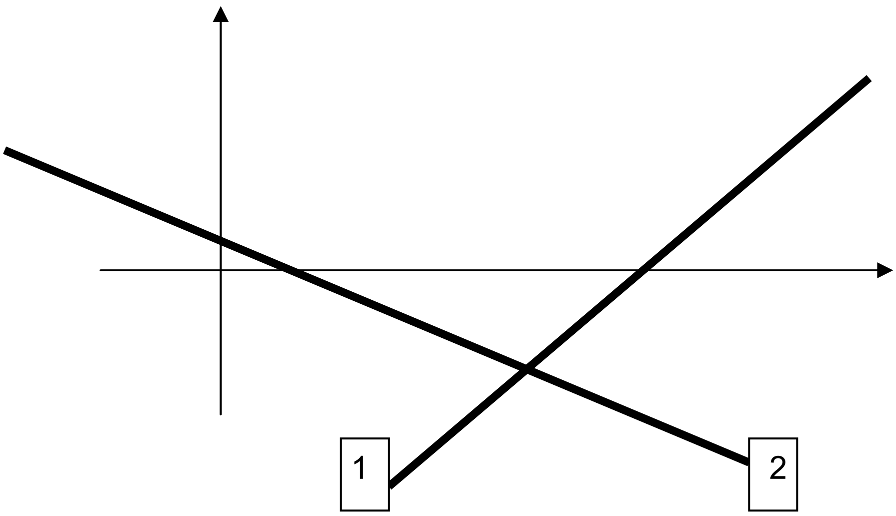
$$X=V*t+X_0$$

כאשר X_0 הוא המרחק ההתחלי (מהראשית ועד לחיתוך הגרף עם הציר האנכי X) . בקו העליון X_0 הוא חיובי ובקו התחתון שלילי.
נסתכל עכשיו על הגרף של מהירות וזמן – מישור V,t .



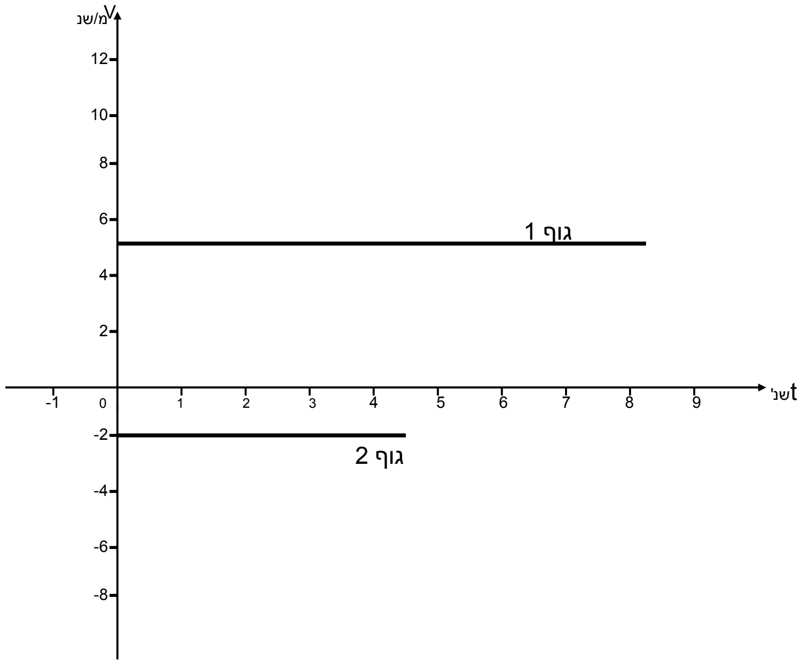
המרחק שהגוף עובר הוא תמיד ביחס לראשית (נקודת הייחוס) כך שאם המהירות היתה שלילית גם המרחק הוא שלילי.
שטח המלבן הוא בדיוק ההעתק. וכפי שראינו אם הגוף נע שמאלה (שלילי) השטח יהיה שלילי ואח"כ חוזר לנוע ימינה (חיובי) הדרך הכללית שהגוף עבר אינו ההעתק . ההעתק הוא הסיכום המתמטי של השטחים.
אם נסתכל על הקו התחתון (המנוקד) שבמישור X,t , בתחילת המדידה הגוף היה במרחק של 2.5 מטר משמאלינו ונע ימינה (אלינו) עד שכעבור 6.25 שניות הגיע אלינו (שם ההעתק = 0) ולאחר מכן התרחק מאיתנו לכוון ימין. כלומר גם כשהיה משמאלינו (שלילי) הגוף נע ימינה זה אומר שהמהירות כל הזמן היא חיובית!.
במישור X,t המהירות היא בעצם ה**שיפוע** של הגרף.
ועל מנת לדעת מתי המהירות (השיפוע) חיובית ומתי שלילית , נתבונן על הגרף (העקומה) . נתחיל מתחתית העקומה (למטה) ונראה אם השיפוע הוא ימינה זה חיובי ואם השיפוע שמאלה זה שלילי.

הסתכל על מערכת הצירים להלן:
קו מספר 1 הוא חיובי (נוטה ימינה) וקו מספר 2 הוא שלילי (נוטה שמאלה).



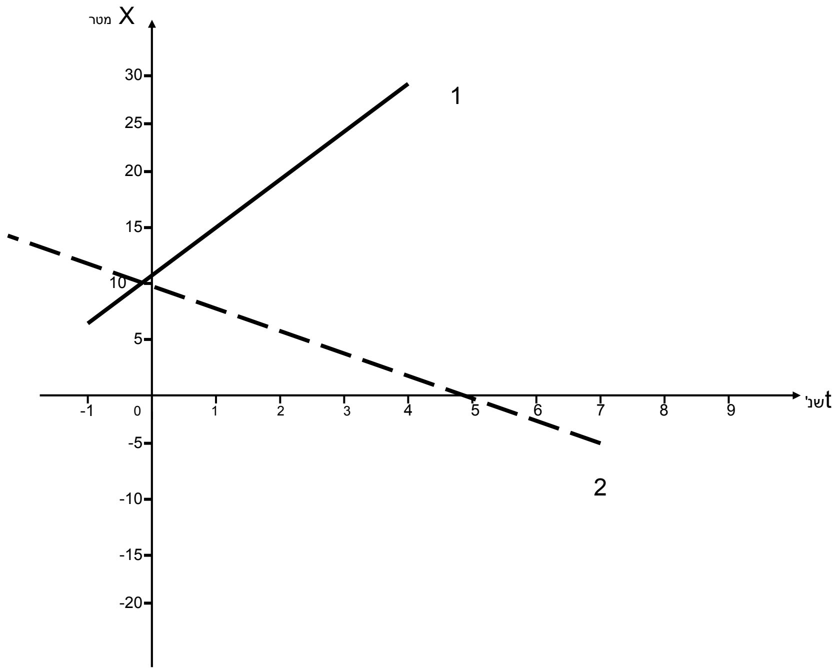
נוכל לתאר זאת שגוף מספר 1 נע ימינה וגוף מספר 2 נע שמאלה.

אם נרצה לתאר זאת במישור V,t זה יראה כך

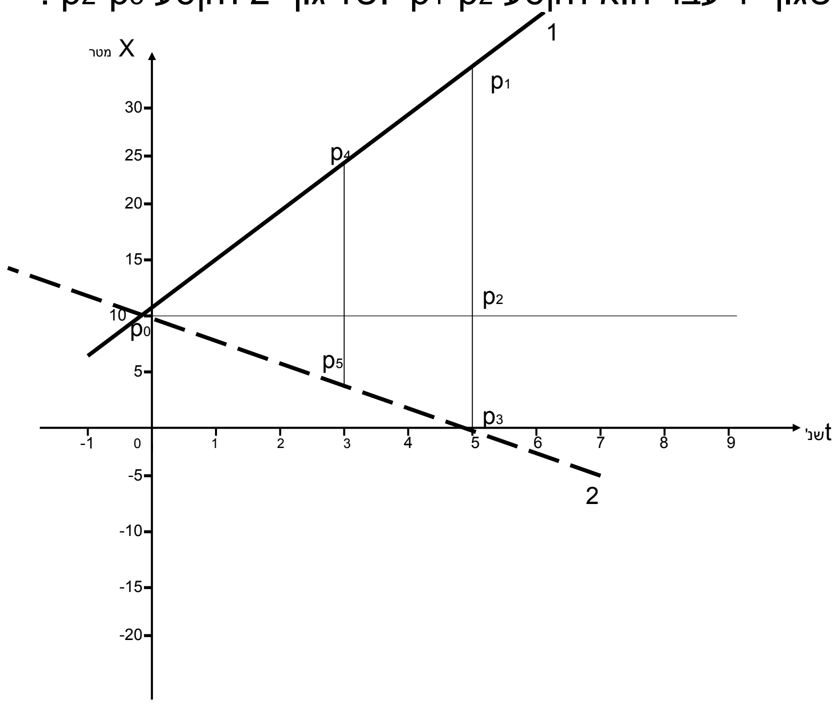


גוף 1 נע חיובית במהירות 5 + מ/שנ ואילו גוף 2 נע שלילית ב 2 - מ/שנ.
ובמשך 5 שניות גוף 1 עשה העתק של 25 מ' וגוף 2 עשה העתק של 10- מ' .
נניח כי הגופים 1 ו 2 היו במרחק של 10 מ' ימינה מכאן (מהראשית)
גוף 1 לאחר התנועה הוא במרחק של $X = 5 * 5 + 10$ כלומר 35 מ'
ואילו גוף 2 הוא במרחק של $X = -2 * 5 + 10$ שזה 0 מ'.

במישור X,t הגרפים ייראו כך:

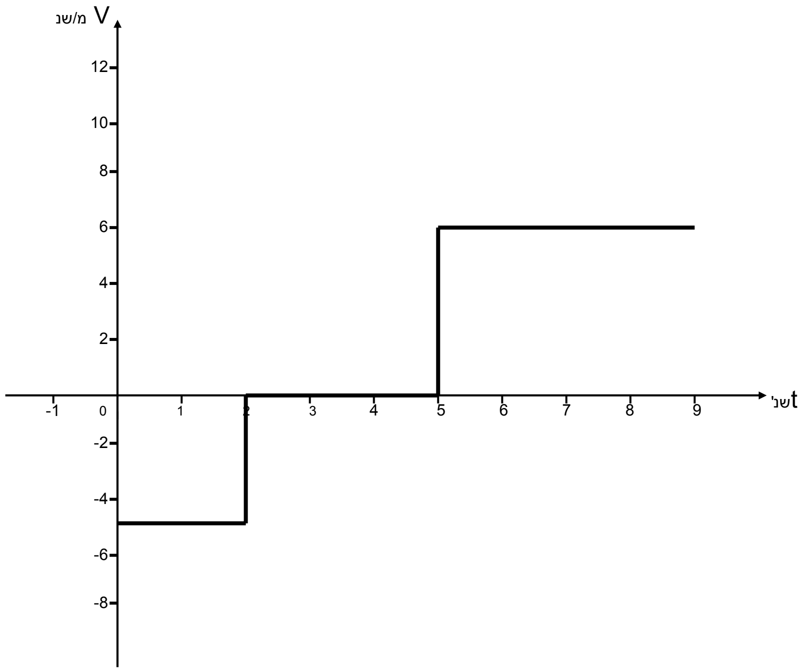


ההעתק שגוף 1 עבר הוא הקטע p_1-p_2 ושל גוף 2 הקטע p_2-p_3 .

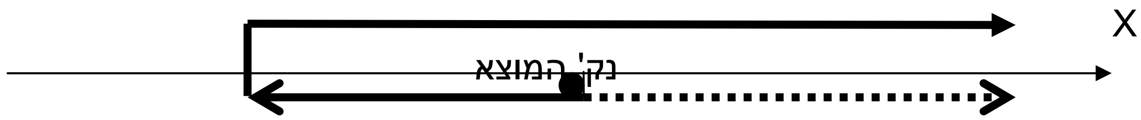


אם נרצה לדעת את המרחק בין 2 הגופים כעבור 3 שניות זה הקטע p_4-p_5 והוא 21 מ' בדוק!

נתאר עכשיו תנועה של גוף כמתואר בגרף הבא:



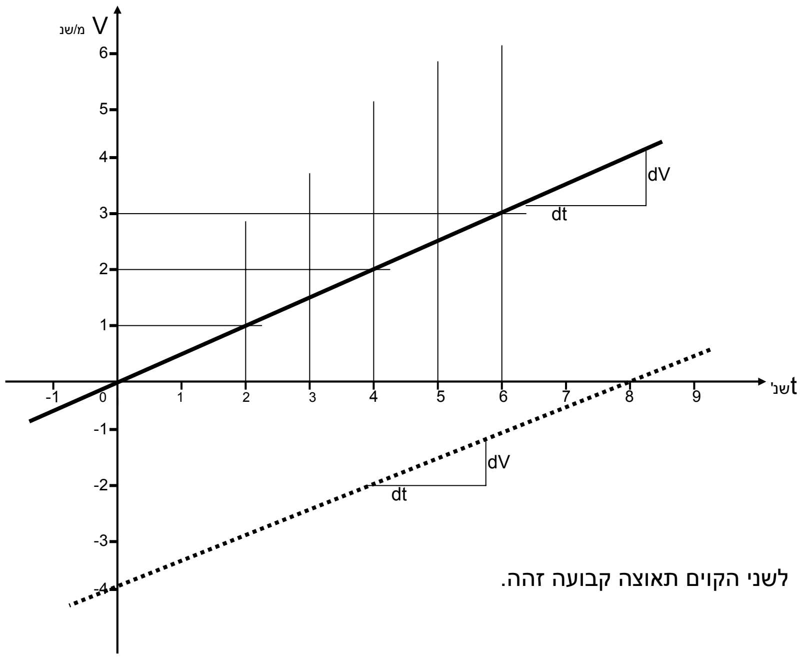
הגוף נע במהירות 5- מ'/שנ במשך 2 השניות הראשונות (נע שמאלה) עצר ונח במקומו למשך 3 שניות ולאחר מכן נע במהירות של 6 מ'/שנ במשך4 שניות (נע ימינה).
סך כל הזמן שנמדד הוא 9 שניות.
ב 2 השניות הראשונות עשה דרך של 10- מ' , לא נע במשך 3 שניות ואחר כך עשה במשך 4 שניות דרך של 24 מ' .
ההעתק שגוף זה עבר הינו 14+ מ' (ראה הקו המקוקו).



לסיכום:נוסחת המרחק שגוף עובר בתנועה קצובה הוא: $X = V * t + X_0$

תנועה שוות תאוצה

תאוצה a היא שינוי המהירות בזמן $a = \frac{dV}{dt}$ תאוצה היא גודל ווקטורי.
אם המהירות של הגוף הולכת וגדלה עם הזמן אנו אומרים שהתאוצה היא חיובית + ואם המהירות הולכת וקטנה עם הזמן התאוצה היא שלילית - .
תנועה שוות תאוצה היא תנועה בה המהירות משתנה בקצב קבוע ביחידת הזמן . יחידות התאוצה היא $\frac{מ}{שנ^2}$.
אם נסתכל על גרף במישור V,t נקבל קו ישר משופע.



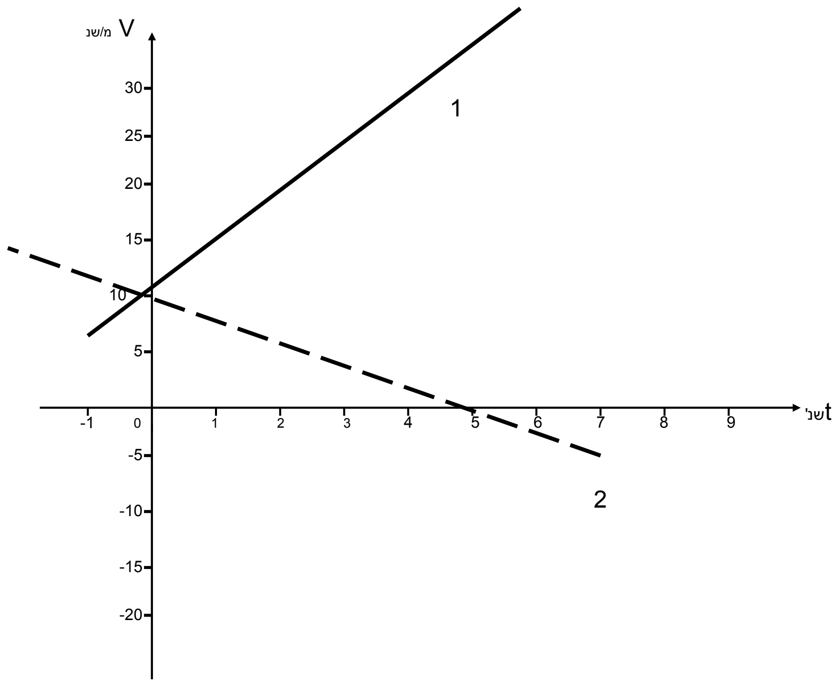
התאוצה כאן היא 0.5 $\frac{מ}{שנ^2}$ כלומר בכל שניה המהירות גדלה ב 0.5 מ/שנ .

מתוך הגדרת התאוצה אנו רואים כי $V_t = a * t$ המהירות לאחר t שניות.

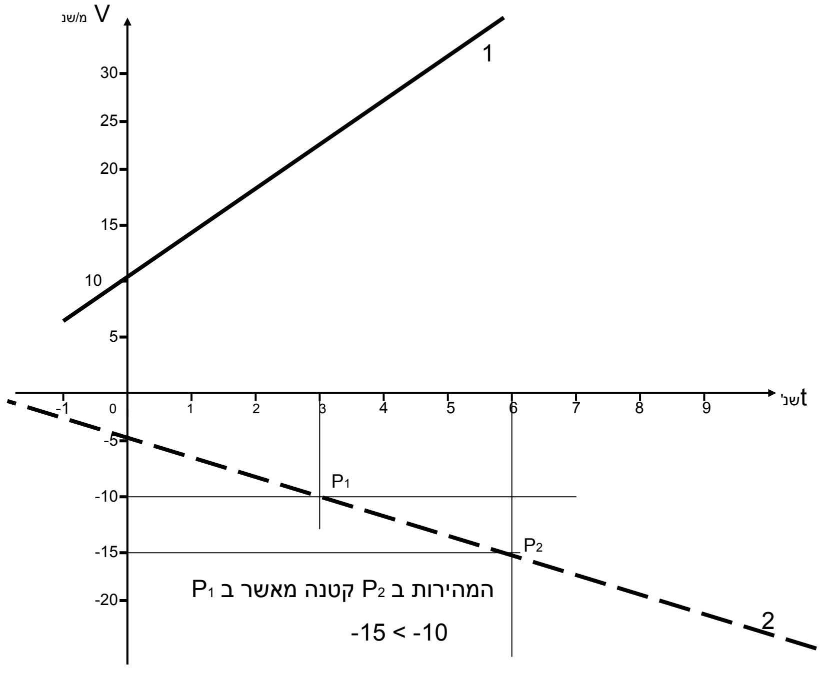
אם נסתכל על הקו המקווקו (התחתון) נראה כי ברגע תחילת המדידה המהירות היא 4- מ/שנ וכעבור 8 שניות היא תגיע למהירות 0 .
מהירות זו 4- היא המהירות ההתחלתית ומסומנת ב V_0 .
ואז המשוואה תהיה $V_t = a * t + V_0$.

ובתחום של ה 8 שניות המהירות **<u>שלילית</u>** ואילו התאוצה **<u>חיובית</u>** והדרך שהגוף עובר היא שלילית.

תיאור תנועת הגוף: הגוף נע שמאלה (-) והמהירות מבחינה פיזיקלית הולכת וקטינה עד הגיעה לאפס (שים לב התאוצה כאן היא חיובית!) ומכאן המהירות נעשית חיובית כלומר הגוף מתחיל לנוע ימינה במהירות ההולכת וגדילה בזמן.
במישור V,t **שיפוע** הקו הוא ה**תאוצה**.
כמו שראינו בתנועה קצובה סימן התאוצה ייקבע כך:
אם (במישור V,t) נתחיל מלמטה ושיפוע הקו יהיה ימינה התאוצה חיובית ואם שיפוע הקו יהיה כלפי שמאל התאוצה שלילית. ראה הגרף הבא:
גרף 1 תאוצה חיובית וגרף 2 תאוצה שלילית.



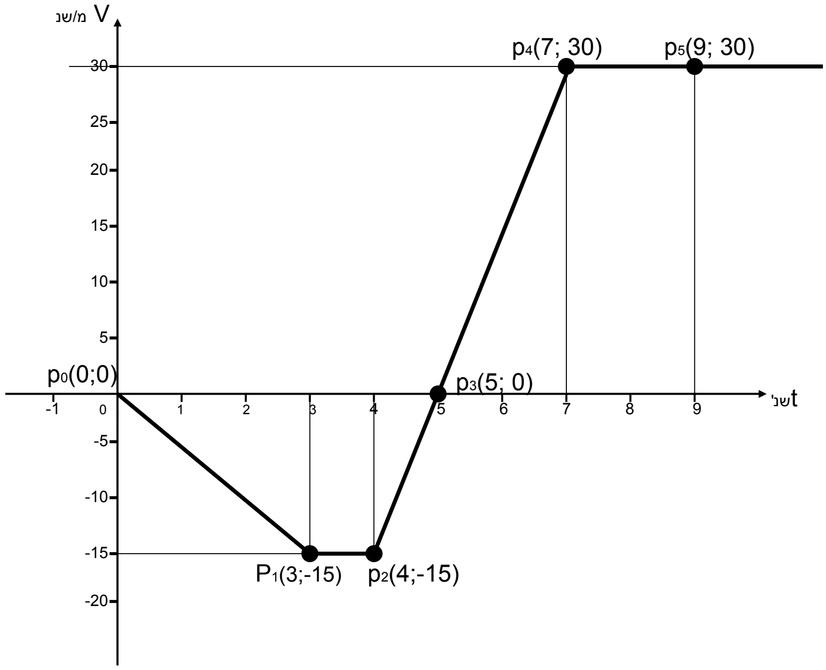
נסתכל על גרף 1 ונראה ככל שאנו מתקדמים בזמן המהירות גדלה לכן התאוצה חיובית. ואילו בגרף 2- ככל שאנו מתקדמים בזמן המהירות קטינה (מתמטית) ולכן התאוצה שלילית.



נסתכל על הנקודות P_1(3:-10) ו (6:-15) P_2 אשר בגרף, ונחשב את התאוצה $a=\frac{dV}{dt}$ על פי הנקודות dV=-15-(-10) וזה שווה ל-5 ,

ו dt=6-3 זה שווה ל3 מכאן נחשב את התאוצה ונקבל $a=\frac{-5}{3}=-1.666$

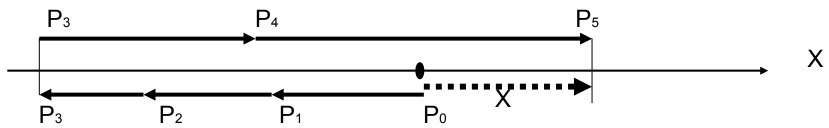
קבלנו תאוצה שלילית.
הגוף נע במהירות שלילית (שמאלה) ובתאוצה שלילית כלומר מבחינה פיזיקלית הוא **מגביר** את מהירותו **<u>שמאלה</u>** והולך ומתרחק מנקודת המוצא.
הגוף נע מנקודה P_1 לנקודה P_2 כלומר ממהירות של 10- למהירות של 15- מבחינה מתמטית המהירות הולכת וקטינה כי $-15 < -10$ זה אומר ש**<u>גברת</u>** המהירות שמאלה היא בעצם הקטנת מהירות ותאוצה שלילית
ניקח דוגמא ונתאר את תנועת הגוף בגרף:



הגוף יוצא מהראשית P_0
במסלול P_0 עד P_1 המהירות קטינה מ 0 ל 15- !
נחשב את התאוצה: שינוי המהירות $-15-(0)=-15$ והזמן הוא 3 שנ
לכן התאוצה $a=\frac{-15}{3}=-5\frac{מ}{שנ^2}$
במסלול P_1 עד P_2 הגוף נע במהירות קצובה 15- מ/שנ במשך 1 שנ
במסלול P_2 עד P_3 התנועה היא שוות תאוצה $a=\frac{0-(-15)}{1}=15\frac{מ}{שנ^2}$
במסלול P_3 עד P_4 התנועה שוות תאוצה $a=\frac{30-0}{2}=15\frac{מ}{שנ^2}$

קבלנו תאוצה זהה חיובית מ P_2 עד P_4 זה קו ישר באותו שיפוע.
ובמסלול $P4$ עד P_5 תנועה קצובה במהירות 30 מ/שנ .

נתאר זאת על ציר ההעתק (המרחק):



ההעתק שהגוף עבר הוא (חיובי) X הקו המקוקו.
מהראשית P_0 עד P_5

נניח שגוף נע במהירות של 10 מ/שנ ומתחיל להגביר את מהירותו בתאוצה של 5 $\frac{מ}{שנ^2}$ הגוף יגיע כעבור 4 שניות למהירות של

$V = 5*4+10 = 30\frac{מ}{שנ}$ כפי שראינו,

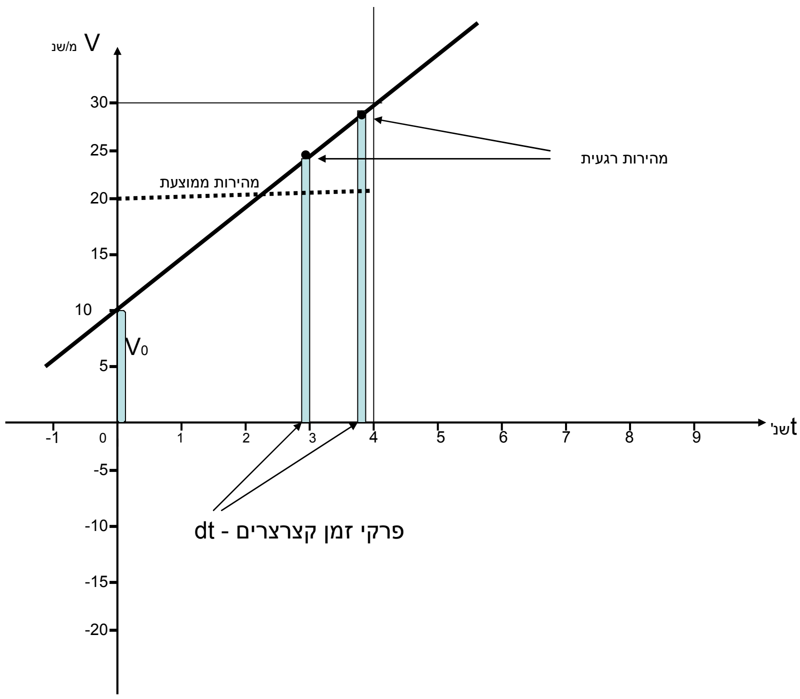
כי בכל שניה הוא הגביר את הקצב ב 5מ/שנ ומאחר ובתחילת המדידה הוא כבר נע במהירות של 10 מ/שנ יש צורך להוסיף זאת.
באופן כללי ניתן למצוא את המהירות כעבור t שניות - V_t

$$V_t = a*t+V_0$$

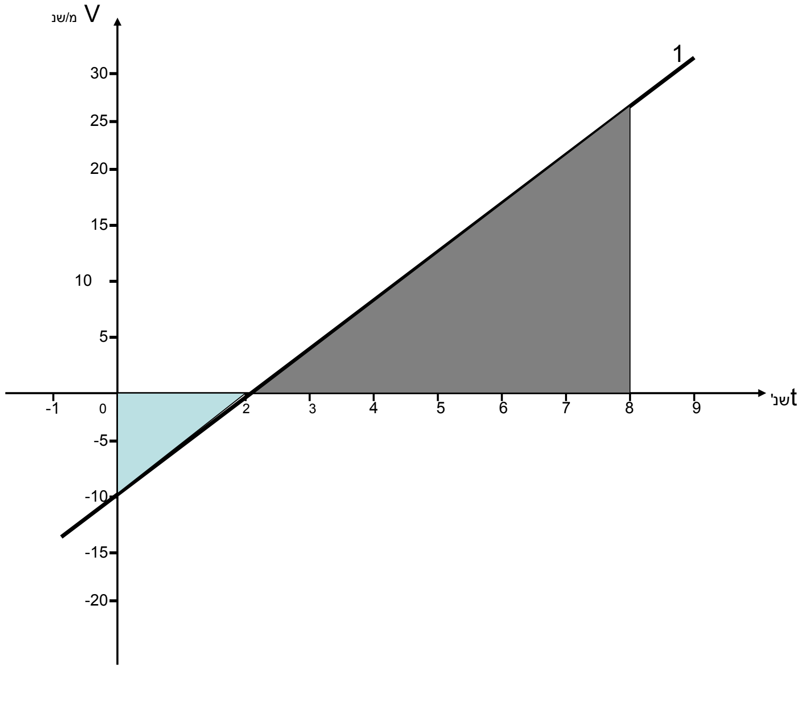
כאשר V_0 היא המהירות ההתחלתית של הגוף, וזמן הגברת הקצב הוא t .
בדוגמא שלנו אנו רואים שבמשך 4 שניות המהירות עלתה
מ 10מ/שנ ל 30מ/שנ.
בשניה הראשונה עלתה מ- 10מ/שנ ל 15מ/שנ .
בשניה השניה עלתה ל 20מ/שנ בשלישית ל 25 מ/שנ וברביעית ל30
אפשר לראות זאת כאילו במשך 4 השניות היא נסעה במהירות קצובה ממוצעת אשר תיתן לנו את אותה התוצאה. המהירות הממוצעת הזו היא 20מ/שנ. את המהירות הממוצעת אנו מוצאים ע"י

$$V_{ממוצע} = \frac{V_t+V_0}{2}$$

אנו לקחנו טווחי זמן של שניה אחת . מה קורה בטווחי זמן של חצי שניה? רבע שניה? או כל פרק זמן קצר מאוד?
מאחר וקצב הגברת המהירות בתנועה שוות תאוצה הוא קבוע (רציף) הרי שגם בפרקי זמן קצרים מאוד המהירות משתנה על פי אותו הקצב כך שאם ניקח בפרק זמן קצר מאוד מהירות הגוף ברגע הזה נקראת המהירות הרגעית של הגוף וברגע הקצר הזה ניתן לראותה כמהירות קצובה.
ובכל נקודה ונקודה בגרף המהירות הרגעית היא שונה.



אנו ראינו בתנועה קצובה כי ההעתק שהגוף עובר הוא בעצם השטח שמתחת לגרף במישור V,t ראה עמוד 7.
ולכן בפרק הזמן הקצר הזה ההעתק שהגוף עובר הוא המהירות הרגעית כפול פרק הזמן הקצר. אם נעבור כך לאורך כל פרקי הזמן הקצרים ובמהירות הרגעית שבאותו פרק זמן ונסכם את כל ההעתקים שקבלנו נקבל את ההעתק הכללי שהגוף עבר בכל הזמן.
גם בתנועה שוות תאוצה השטח שמתחת לגרף נותנת לנו את המרחק שהגוף עשה.



אנו רואים שהגוף עבר ב 2 השניות הראשונות מרחק שלילי S1 (מהירות

שלילית) נע שמאלה ואז מתחיל לנוע ימינה (מהירות חיובית) ונע עוד 6 שניות ועושה דרך חיובית S2.
ההעתק שהגוף עבר הוא הסכום המתמטי $X = S1 + S2$ (כאן S1 שלילי).

נראה עכשיו כיצד נחשב את ההעתק שהגוף עבר במשך t שניות.
לדוגמא נסתכל על הגרף הבא:
הגוף הגביר את מהירותו מ 10מ/שנ ל 30 מ/שנ במשך 8 שניות, לכן המהירות הממוצעת (קצובה בזמן הזה) והיא 20מ/שנ.
במהירות קצובה ההעתק שהגוף עבר בזמן הזה הוא

$$X = V_{\text{ממוצע}} * t = 20 * 8 = 160\text{מ}$$

הגרף הוא טרפז ישר זוית שהגובה הוא הזמן 8שניות והשטח שלו הוא

$$S_{\text{טרפז}} = \frac{(\text{בסיסעליון} + \text{בסיסתחתון}) * \text{גובה}}{2}$$

ולכן השטח הוא $S = \frac{(10+30)*8}{2} = 160\text{מ}$ וזה בדיוק כמו שקבלנו.

הדרך שהגוף עבר במשך 8 שניות הוא השטח שמתחת לגרף.

נראה את הנוסחא המתמטית: $X = V_{\text{ממוצע}} * t$

ראינו כי $V_{\text{ממוצע}} = \frac{V_t + V_0}{2}$ לכן $X = \frac{1}{2}(V_t + V_0) * t$

נציב את $V_t = V_0 + a * t$ $X = \frac{1}{2}(V_0 + at + V_0) * t = \frac{1}{2}(2V_0 + at) * t$

ומכאן נקבל כי $X = V_0 * t + \frac{1}{2} aT^2$

זו נוסחת המרחק שהגוף עבר. ואם בתחילת המדידה הגוף היה במרחק X_0 נוסחת המרחק היא

$$\boxed{X = V_0 * t + \frac{1}{2} a * t^2 + X_0}$$

נבדוק זאת לגבי הדוגמא שלנו:

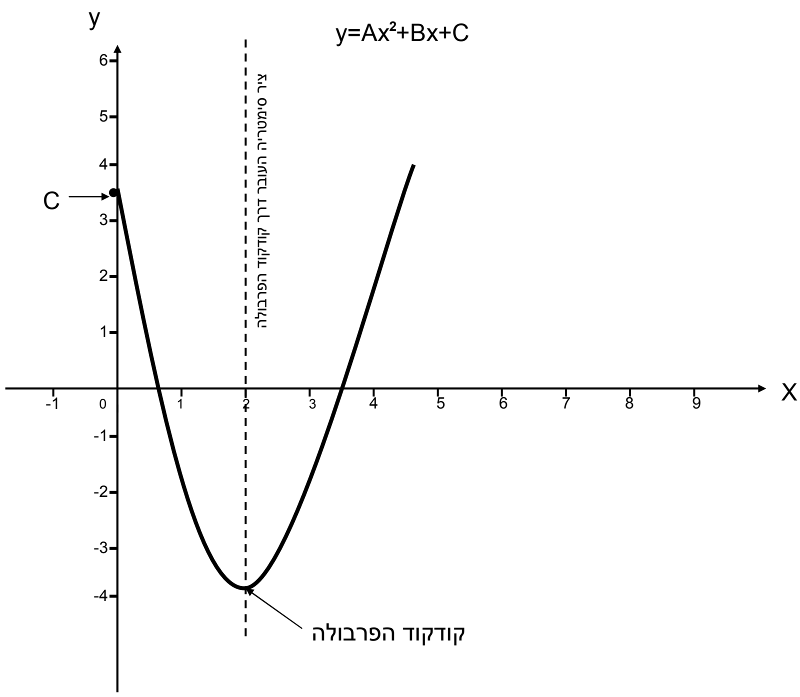
המהירות ההתחלתית היא 10 מ/שנ . התאוצה היא $a=\frac{30-10}{8}=2.5\frac{\text{מ}}{\text{שנ}^2}$

$X_0 = 0$ ולכן ההעתק הוא: לפי הנוסחא

$X=10*8+\frac{1}{2}*2.5*8^2=80+80=160\text{ מטר}$. **כמו שקבלנו.**

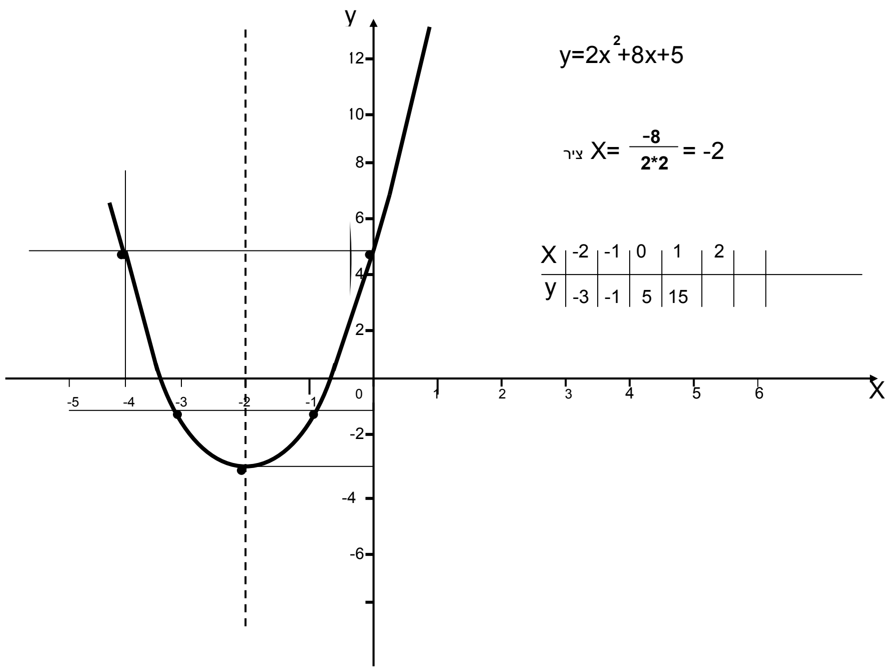
נוסחת ההעתק הזו מזכירה את ה"משוואה הריבועית" במתמטיקה.

במתמטיקה אנו יודעים כי הפונקציה $y=Ax^2+Bx+C$ היא פרבולה.



ערך ה-X בקודקוד הוא $X=\frac{-B}{2A}$ וזה ציר הסימטריה. ערך הפונקציה y שווה מימין ומשמאל של ציר הסימטריה. אם אצלינו למשל ציר הסימטריה הוא X=2 אזי ב X=1 וב X=3 (משני צידי ציר הסימטריה) ה Y יהיה זהה.
נקודת המפגש של הגרף עם ציר y זה ה C .
ה C הוא רק מעלה או מוריד את הפונקציה מבלי לשנות את צורת הגרף.
אם A הוא חיובי הגרף הוא כפי שרואים אותו והקודקוד היא הנקודה למטה (הנמוכה ביותר) ואם ה A הוא שלילי הקודקוד הוא למעלה (הגבוה ביותר) לכן בנקודת הקודקוד ערך הפונקציה היא בעלת הערך הנמוך או הגבוה ביותר.
כיצד נוכל לצייר את הגרף :
ראשית נחשב את X בציר הסימטריה ולאחר מכן נבחר נקודות נוחות לחישוב מצד אחד של ציר הסימטריה ונעביר גם לצד השני של ציר הסימטריה.
לדוגמא:

$$y=2x^2+8x+5$$



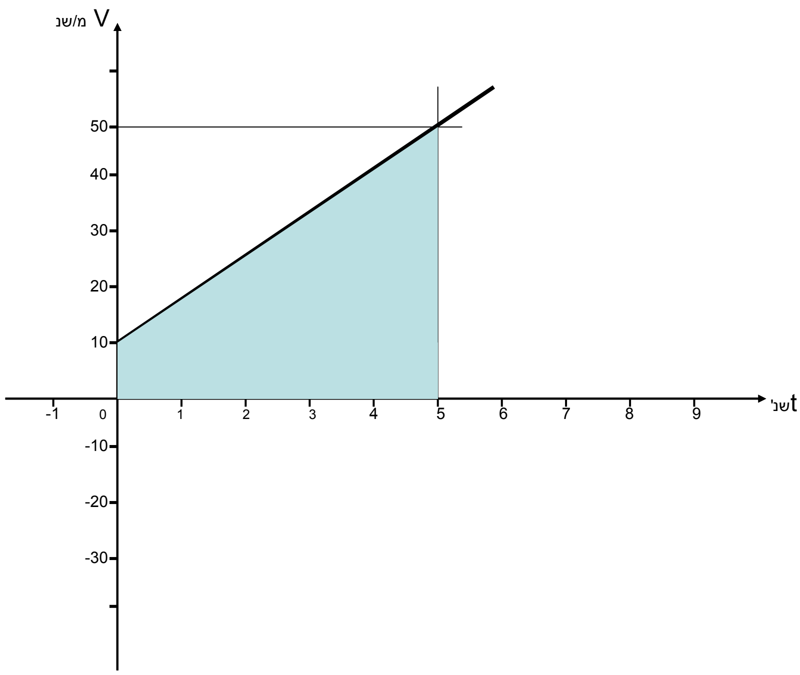
אם נרצה להתאים זאת אצלנו בפיזיקה $X = V_0 * t + \frac{1}{2} a * t^2 + X_0$ ונציב את t

(במקום המשתנה X) נקבל פרבולה שבה : $A = \frac{1}{2} a$ $B = V_0$ ו $C = X_0$

ניקח דוגמא: גוף נע בתנועה קצובה במהירות של 10מ/שנ והגביר את מהירותו בתאוצה של 8 $\frac{מ}{שנ^2}$ במשך 5 שניות מה יהיה מרחקו מנקודת המוצא?.

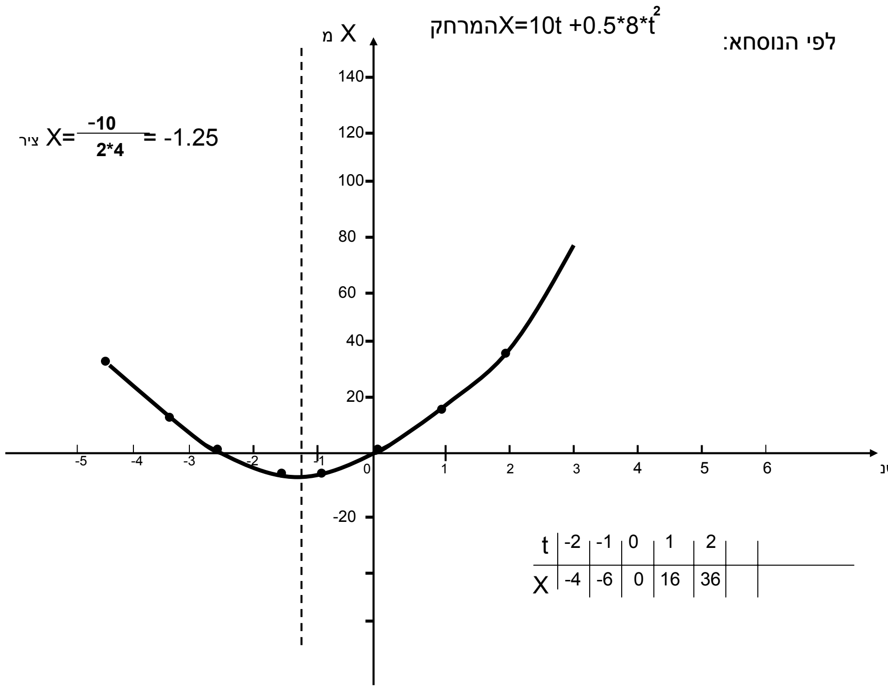
צייר את הגרף במישור V,t ובמישור X,t .

במישור V,t



תרגיל: חשב את השטח

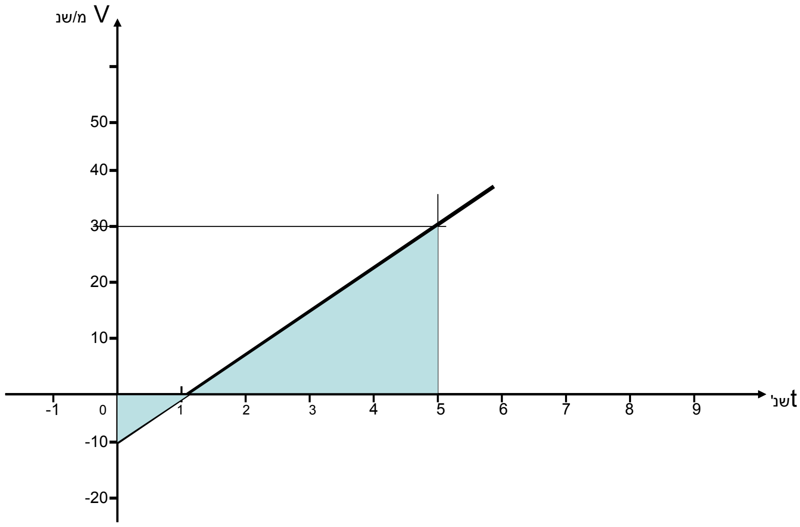
ובמישור X,t

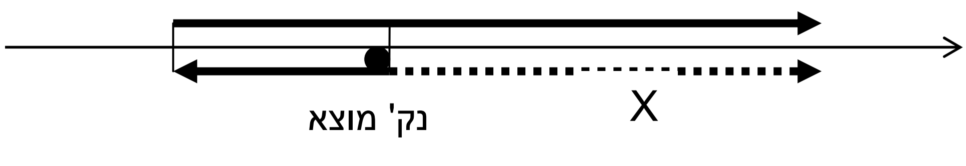


t	-2	-1	0	1	2
X	-4	-6	0	16	36

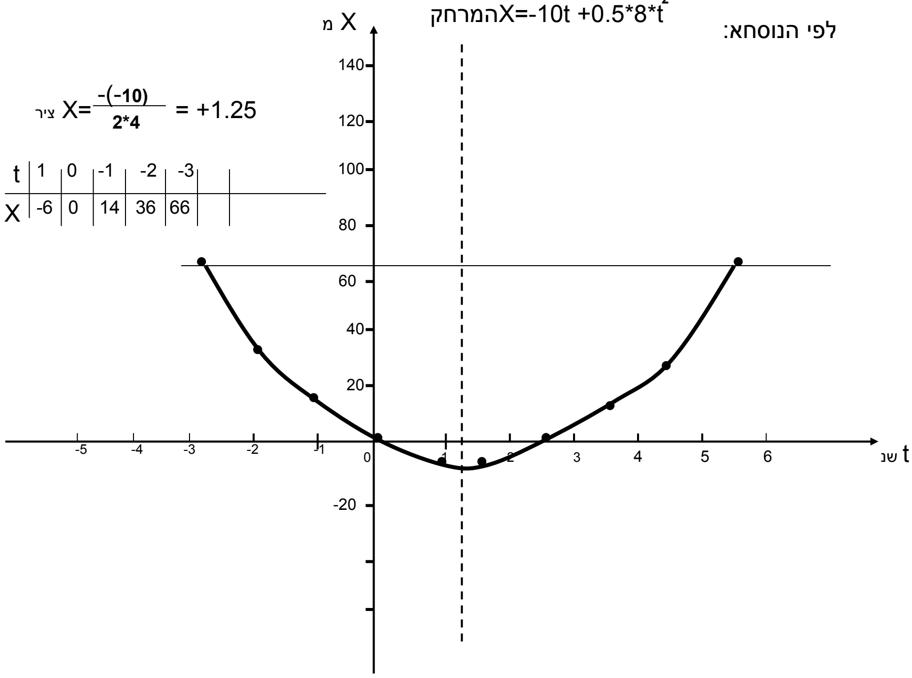
אנו רואים כי תחילת המדידה היא בראשית והמרחק מהראשית על פי הנוסחא היא $X=10*5+0.5*8*5^2=150$מ

נראה עכשיו מה קורה כאשר המהירות ההתחלתית היא 10- מ/שנ ?.
מאחר והתאוצה היא חיובית $8\frac{מ}{שנ^2}$ נסתכל על הגרף במישור V,t .





הגוף נע שמאלה מאט עד שמגיע למהירות אפס ומשם מתחיל לנוע ימינה.
והמרחק הוא הסכום המתמטי של המרחקים.

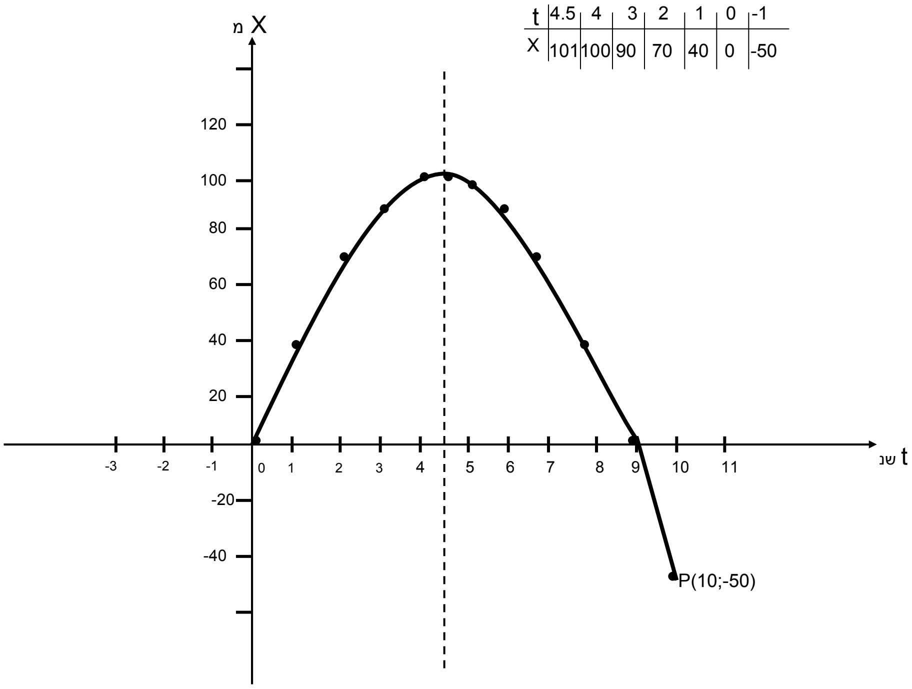


אנו רואים שעד ל 2.5 שניות הגוף עבר מרחק שלילי ומ 2.5 שניות עד ל 5 שניות עבר מרחק חיובי. בנקודת הקודקוד $t = 1.25$שנ הגוף עבר מתנועה שמאלה לתנועה בכוון ימינה. חשב: מה ההעתק שהגוף עבר ב 5 שניות?
נבדוק עתה מה המרחק שהגוף עבר בשניה ה-3 לתנועתו?
השניה ה-3 לתנועתו היא מ t=2 עד t=3
לכן נסתכל על הגרף ב- t=2 וב-t=3 (קוים אנכיים)
כאשר t=2 המרחק מהראשית הוא: 4- מטר
וכאשר t=3 המרחק הוא 6+ מטר כלומר הגוף עבר מ 4- ל 6+
וזה רק 2+ מטר מהראשית.
באותה מידה אנו יכולים לדעת כמה זמן לקח לגוף לעבור ממרחק של 14 מ' עד למרחק של 66 מ' .
נסתכל על x=14 (קו אופקי) נראה שה t הוא 3.5 שנ'
וכאשר x=66 ה t הוא 5.5 שנ' מכאן שהוא עבר זאת ב- 2 שניות.
נראה עכשיו דוגמא כאשר התאוצה היא שלילית.
גוף נע במהירות של 45 מ/שנ והחל להאיט (תאוצה שלילית) בקצב קבוע של $-10 \frac{מ}{שנ^2}$ נראה את הגרף במישור x,t

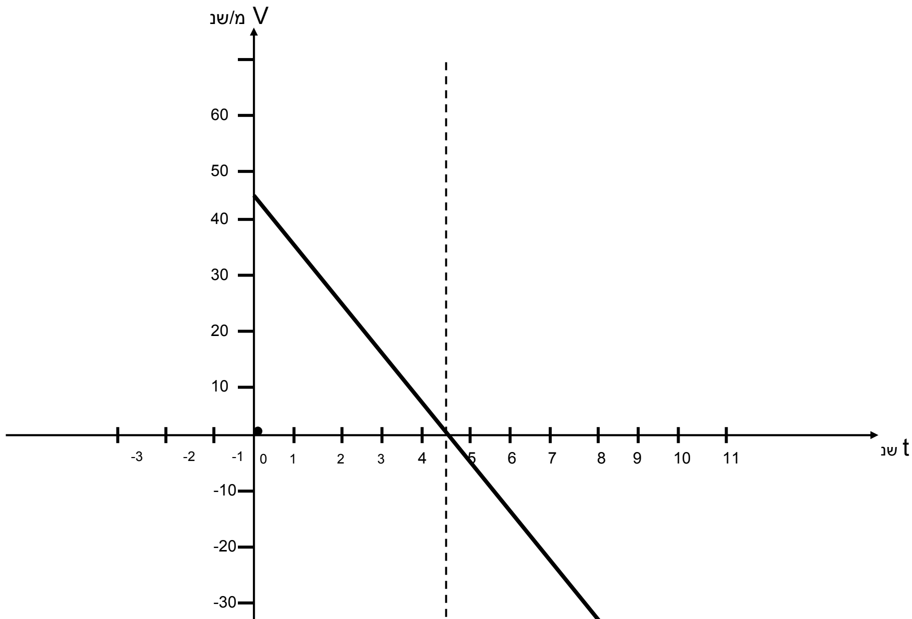
הנוסחא היא: $X = V_0 * t + \frac{1}{2} a * t^2$

ואצלינו $X = 45t + \frac{1}{2}(-10)t^2$ כלומר $X = 45t - 5t^2$

נראה את ציר הסימטריה (בקודקוד) $t_{ציר} = \frac{-45}{-10} = 4.5$



ובמישור V t.



נראה על פי הגרפים:

א. כעבור כמה זמן יגיע הגוף למרחק של 40 מ' ולמרחק של 90 מ'

ב. מה יהיה מרחק הגוף כעבור 10 שנ'

ג. כמה זמן לקח לגוף לעבור ממרחק של 40 מ' למרחק של 100מ'

ד. מה מהירות הגוף כעבור 7 שנ' ומה כוונה?

ה. מה מהירות הגוף כעבור 2 שנ' ומה כיוונה? השווה עם תשובה ד!

ו. איזה מרחק עבר הגוף בשניה ה-4 לתנועתו?

תשובות:
א. במישור X,t נעביר קו אופקי על ה-40מ' ונקבל t=1 ו t=8
ובאותו אופן נעביר קו אופקי על ה 90 מ' ונקבל t=3 ו t=6

ב.המרחק הוא 50- מ' בדוק על פי הנוסחא!

ג. הגוף עבר מ t=1 עד t=4 כלומר 3 שנ'

ד. נסתכל על מישור V,t ונראה כי המהירות היא 25- מ/שנ
ראה במישור X,t את שיפוע הקו בנקודה t=7 .

ה. המהירות היא 25+ מ/שנ (ראה ציר הסימטריה)

ו. נעביר 2 קוים אנכיים ב t=3 וב t=4 נקודות החיתוך עם הגרף הם
x=90 ו x=100 מכאן שעבר 10 מ' בשניה ה-4 לתנועתו.

תרגיל: בצע ומצא את כל התשובות על פי הנוסחאות והשווה!

ניקח דוגמא של גוף הנע על פי הגרף שבעמוד הבא:

נניח כי הראשית היא גם נקודת המוצא של הגוף. כלומר $X_0=0$.

תאר והסבר על פי הגרף במישור V,t את תנועת הגוף בכל אחד מקטעי הזמן השונים (כולל כיוון התנועה).

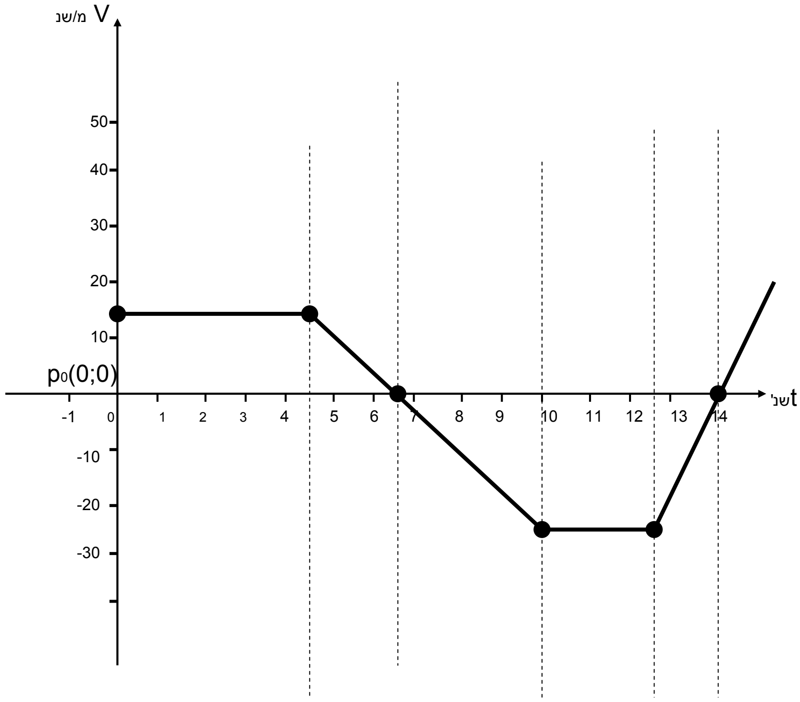
שרטט את הגרף במישור X,t בהתאם למישור V,t

חשב על פי הנוסחאות את ההעתקים ואת התאוצות בקטעי הזמן השונים והשווה את התוצאות שקבלת עם הנתונים המתאימים שבגרף.

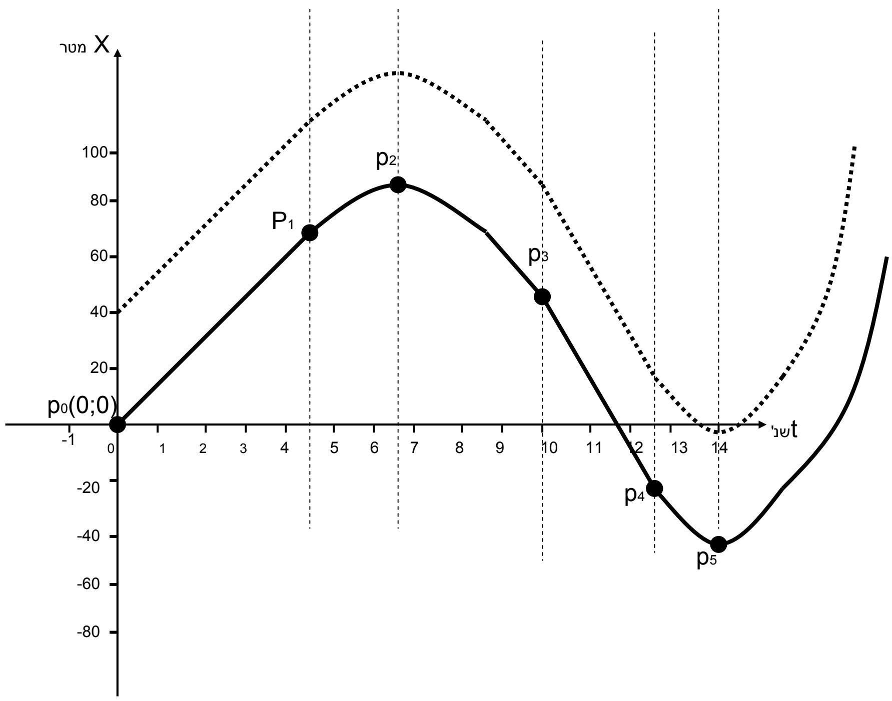
חשב על פי הנוסחאות, מתי הגוף יחזור לנקודת המוצא?
והשווה זאת עם הגרף.

כיצד יראה הגרף במישור X,t באם בתחילת המדידה הגוף היה במרחק של 40 מטר .

הסתכל על הגרף X,t בנקודות בהן המהירות היא אפס.



הגרף במישור X,t יראה כך:
הקו המקווקו הוא כאשר הגוף התחיל ממרחק של 40 מ' ($X_0=40$) .

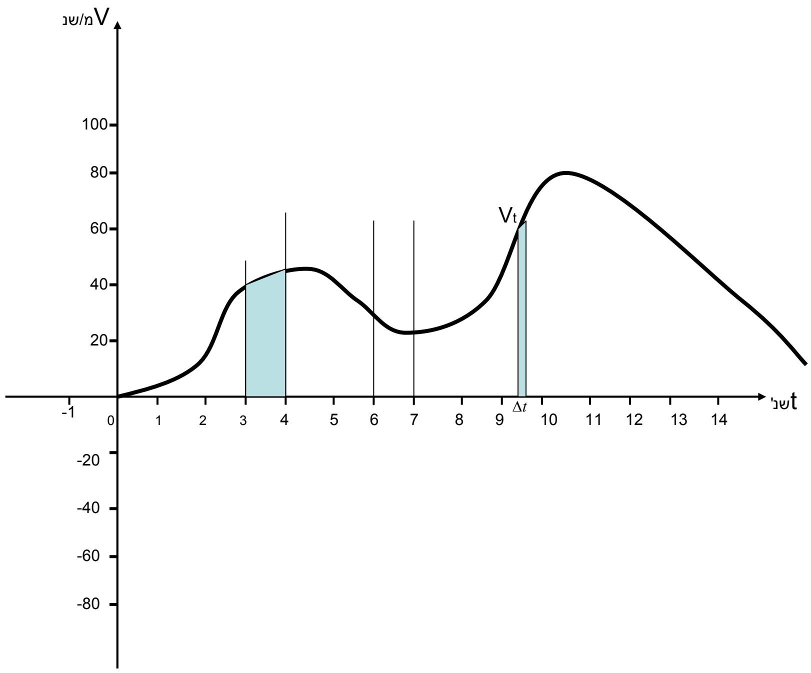


אם אנו מסתכלים במישור V,t , אנו רואים כי הגוף נע בפרקי זמן שונים בתנועות שונות.
בהנחה שהגרף הוא רציף (מעבר חלק מתנועה לתנועה) אנו יכולים

לבטא את הגרף המלא, את המהירות כפונקציה של הזמן $V = f(t)$
כמו שראינו בתנועה קצובה : קבוע $V = V_0$
ובתנועה שוות תאוצה $V = V_0 + a * t$ (t הוא ממעלה ראשונה)
כך יכולה להיות תנועה של גוף כמתוארת ב- $V = V_0 + at + bt^2$
או כל פונקציה שהיא.

תנועה כללית של גוף

נסתכל על הגרף הבא :



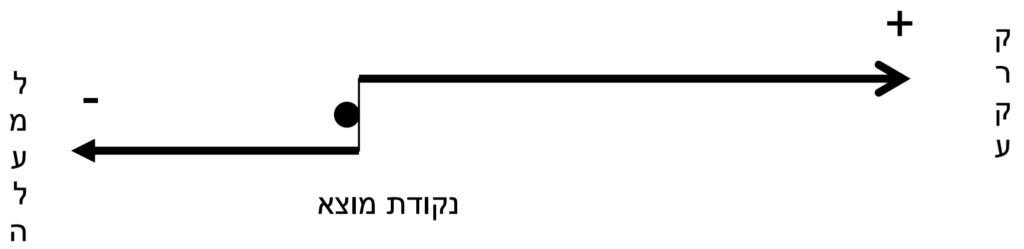
אנו ניקח פרקי זמן Δt כאלה שבהם נוכל לראות תנועות המוכרות לנו.
בכל מקרה המרחק שהגוף יעבור הוא סכום השטחים שמתחת לעקומה ובעתיד תלמדו כיצד לחשב את השטח שמתחת לעקומה .

נפילה חופשית

על פני כדור הארץ יש כוח כבידה (גרביטציה) אשר מקנה לגוף תאוצה קבועה לכיוון מרכז הכדור, כך שאם גוף נופל ממגדל גבוה או לתוך בור עמוק, מהירות הגוף תלך ותגדל ככל שנופלת עמוק יותר.

התאוצה הקבועה של כוח הכבידה מסומן באות g (גרביטציה) וגודלו $g=9.81\frac{\text{מ}}{\text{שנ}^2}$ או $g=981\frac{\text{סמ}}{\text{שנ}^2}$ על מנת להקל על החישובים אנו ניקח g=10 או g=1000 בהתאמה.

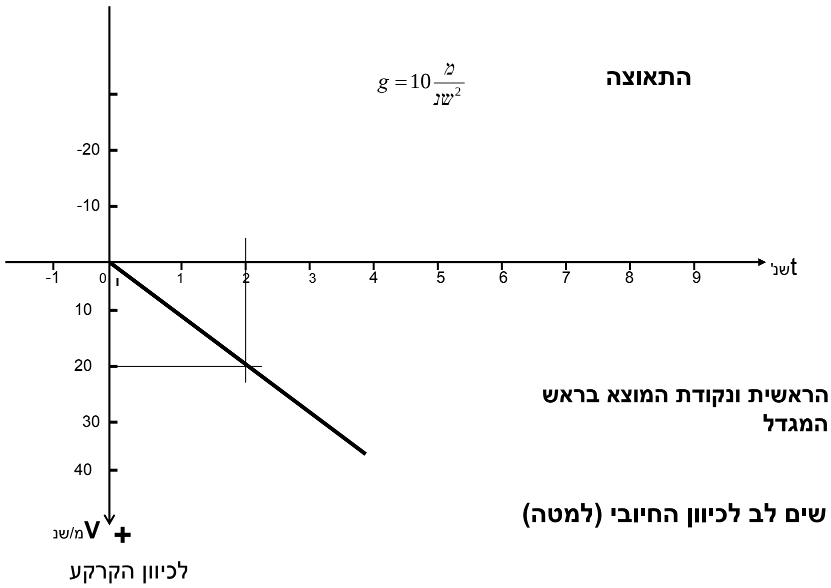
כאשר גוף נופל (לא נזרק כלפי מטה) $V_0=0$ מהירותו ב**כל שניה ושניה** הולכת וגדילה ב-10מ/שנ וככל שיתקרב לפני כדור הארץ כך מהירותו תגבר. לכן אנו נבחר את הכיוון כלפי מרכז כדור הארץ(מטה) כמהירות + וכלפי מעלה כמהירות - .
התאוצה g והמרחק X גם הם יהיו חיובי כלפי מטה ושלילי כלפי מעלה. (במתמטיקה אנו רגילים שהציר האנכי הוא חיובי כלפי מעלה).
כמו כן אנו נתייחס לנקודת המוצא כראשית ולכן $X_0 = 0$. זה אומר ככל שהגוף צונח ומתקרב לכדור הארץ כך מרחקו יגדל מהראשית.



תנועה זו היא תנועה שוות תאוצה וכפי שלמדנו :
$V_t = V_0 + gt$ והמרחק הוא $X=V_0t+\frac{1}{2}gt^2$ ומאחר ו $V_0=0$ נקבל

$$V=gt$$
$$X=\frac{1}{2}gt^2$$

הגרף במישור V,t יצא מהראשית וייראה:



ניקח דוגמא:

גוף נופל מממגדל שגובהו 80 מ' כעבור כמה זמן יפגע בקרקע?

g=10

X=+80 כלפי הקרקע **חיובי**!

נציב בנוסחא ונקבל $80=\frac{1}{2}*10*t^2$

$5t^2=80$

$t=\pm 4\text{שנ}$

הגוף יפגע בקרקע כעבור 4 שנ'

מהירות הפגיעה בקרקע היא $V=10*t=40\frac{\text{מ}}{\text{שנ}}$

נניח עכשיו כי הגוף הנ"ל המשיך ליפול לתוך באר שעומקה 20 מ'.
מהירותו על פני הקרקע היא 40 מ/שנ - כפי שראינו - ובתאוצה g
נחשב את הזמן .

א. מגובה פני הקרקע

ב. מגובה המגדל

נעשה זאת עלפי נוסחת המרחק

א. זו תנועה שוות תאוצה ולכן $X=V_0t+\frac{1}{2}gt^2$ נציב ונקבל:

$20=40t+5t^2$ מכאן נקבל את הזמן שהגוף עבר מפני הקרקע עד לתחתית הבאר. זו משוואה ריבועית $5t^2+40t-20=0$

$t_1=\sim 0.5\text{שנ}$ ו- $t_2=\sim -8.5\text{שנ}$

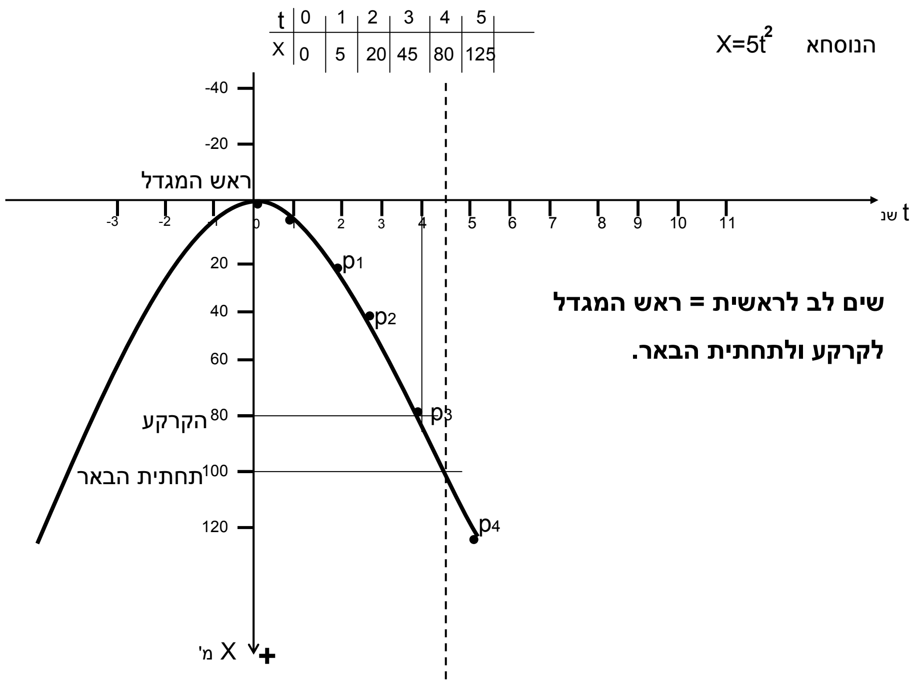
כלומר את עומק הבאר הגוף עבר ב-0.5 שנ'. ואם נרצה לדעת את הזמן שנפל מהמגדל ועד לתחתית הבאר נחבר את שני הזמנים 4שנ' + 0.5שנ'.

ב. אם לקחנו את ראש המגדל כראשית (גם נקודת המוצא) הרי שהמרחק שהגוף עבר עד לתחתית הבאר היא 20+80 מ'. התנועה כלפי מטה חיובית

$X = 100$מ' לכן נציב בנוסחא ונקבל $100 = \frac{1}{2} * 10t^2$

$t = \pm\sqrt{20} = \pm 4.5$ בדיוק כמו שקיבלנו.

נראה את הגרף במישור X,t שים לב הכיוון החיובי כלפי מטה ולכן



מתוך הגרף נוכל למצוא נתונים נוספים:

א. איזה מרחק עבר הגוף בשניה ה-3 לתנועתו

ב. באם עומק הבאר 40 מ' כמה זמן הגוף נע בתוך הבאר

א. השניה ה- 3 לתנועתו היא בין הנקודות p1 ו p2 נעביר קוים אנכיים בנקודות אלו ונקבל ב P1 זה 20מ' וב P2 זה 45מ'
לכן בשניה ה-3 הגוף עבר מ' 45-20=25

ב. נעביר קוים אופקיים ב P3 פני הקרקע 80מ' ואם עומק הבאר 40מ' - P4 .
ונקבל $t_1=4$ ו $t_2=5$ ומכאן שבתוך הבאר ינוע במשך שניה אחת.

מה קורה כאשר גוף **נזרק** אנכית כלפי מטה. יש לו מהירות התחלתית V_0
ולכן כל הנוסחאות של תנועה שוות תאוצה מתקיימות.

$X = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ ו- $V_t = V_0 + gt$

זריקה אנכית כלפי מטה

לדוגמא: גוף נזרק כלפי מטה במהירות של 5מ/שנ' ומגובה של 200מ'

מצא: א. כעבור כמה זמן יגיע לקרקע
ב. באיזה מהירות הגוף יפגע בקרקע
ג. איזה מרחק יעבור בין השניה ה-2 וה-5 לתנועתו.

הנתונים: $V = +5\frac{מ}{שנ}$, $g = +10\frac{מ}{שנ^2}$ ו- $X = +200מ$ (חיובי כלפי מטה)

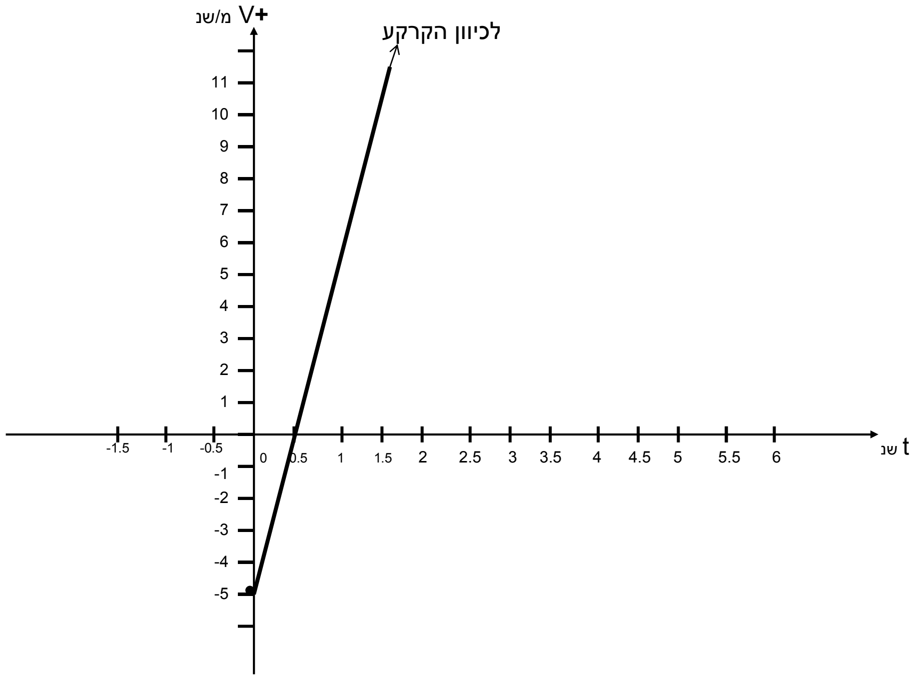
א. נציב ונקבל
(שים לב! נזרק מגובה של 200מ' (נקודת המוצא) וזו גם הראשית).
לכן $200 = 5t + \frac{1}{2} * 10t^2$ וקבלנו משוואה ריבועית $t^2 + t - 40 = 0$
נפתור על פי משוואה ריבועית ונקבל
$t_1=5.85$ ו $t_2 = -6.85$ (ניקח רק הפתרון החיובי)
כלומר הגוף יפגע בקרקע כעבור 5.85שנ' .

ב. מהירות הפגיעה היא $V_t = 5 + gt = 5 + 10 * 5.85 = 63.5\frac{מ}{שנ}$

ג. במשך 5 השניות הראשונות לתנועתו עבר $X = 5 * 5 + 5 * 5^2 = 150מ$
ובמשך 2 השניות הראשונות לתנועתו עבר $X = 5 * 2 + 5 * 2^2 = 30מ$
מכאן שבין השניה ה2 ל 5 עבר 120מ'

ומה קורה באם הגוף ייזרק במהירות של -5 מ/שנ ומגובה של 80מ'?
זה אומר כי הגוף נזרק כלפי מעלה במהירות של 5מ/שנ'
התאוצה g היא אותה תאוצה חיובית (כפי שראינו בתנועה שוות תאוצה)
ולכן המרחק שהגוף יעבור יישמע לאותם הנוסחאות.
$X = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ וניקח את הראשית כנקודת המוצא.

התיאור הגרפי במישור V,T ייראה



זריקה אנכית כלפי מעלה

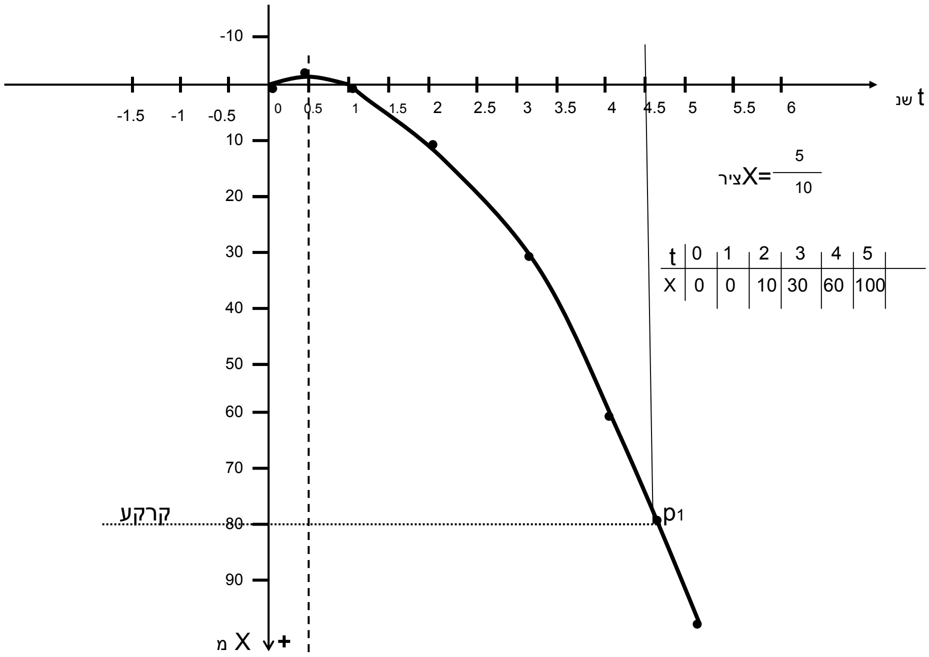
גוף הנזרק כלפי מעלה מהירותו שלילית.
וכתוצאה מכוח הכבידה הגוף עולה עד שמגיע למהירות אפס ומשם מתחיל ליפול חופשית לעבר הקרקע.
כפי שראינו הגוף עובר ממהירות 5- למהירות אפס – מגביר את מהירותו מבחינה מתמטית $0 > -5$ ולכן התאוצה היא חיובית.

אם ניקח את הכיוון למטה כחיובי נקבל ש

$$X = -V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

נראה את הגרף במישור X,t כאן ציר המרחק יהיה חיובי כלפי מטה!

הנוסחא לאחר הצבת נתוני הבעיה תיראה: $X=-5t+\frac{1}{2}gt^2$



הגוף נזרק כלפי **<u>מעלה</u>** במהירות של 5 מ/שנ , הגיע לגובה מקסימלי במהירות 0 ומשם צונח חופשית לכיוון הקרקע.
מאחר והקרקע במרחק 80מ' (ראה נקודה p1 בגרף) הזמן עד שיפגע בקרקע הוא 4.5~שנ' .
נחשב מהו הגובה המכסימלי שהגוף יגיע?
הגוף עבר ממהירות 5- מ/שנ עד ל 0 (בגובה המכסימלי) בתאוצה g
לכן נציב ב $V_t=V_0+gt$ ונקבל 0=-5+10t מכאן t=0.5
והמרחק בזמן הזה הוא $X=-5*0.5+5*0.5^2=-1.25$
זה אומר שהגוף נע כלפי מעלה במשך 0.5 שנ' ועלה לגובה של 1.25מ' מנקודת המוצא כך שאם רוצים לדעת את הגובה המכסימלי מפני הקרקע יש להוסיף 80מ'.

ניקח דוגמא נוספת:
גוף נזרק ממגדל שגובהו 200 מ' במהירות של 5מ/שנ **כלפי מעלה** חשב:
א. כעבור כמה זמן יגיע לקרקע?
ב.לאיזה גובה מכסימלי מהקרקע הוא יגיע?
ג. כעבור כמה זמן יגיע לגובה של 60 מ' מהקרקע?
ד. כמה זמן לקח לגוף מרגע היציאה עד לגובה המכסימלי?
ה.מה המרחק שהגוף עבר בשניה ה-4 לתנועתו?
ו. באיזה גובה מהקרקע ימצא כעבור 6 שנ מרגע היציאה?

ז. מה מהירות הפגיעה בקרקע?

תשובות: הנתונים הם 5- מ/שנ'$=V_0$, 200מ' = X ו- g התאוצה.

א. נציב בנוסחת המרחק ונקבל $200 = -5t + \frac{1}{2}*10t^2$

נחלק ב-5 $t^2 - t - 40 = 0$

לפי נוסחת משוואה ריבועית $t = \frac{1 \pm \sqrt{1+160}}{2}$

ונקבל $t_1 = \sim 6.8$ ו $t_2 = \sim -5.8$ נקח את החיובי 6.8 שנ'

מה אומר לנו הפתרון השני 5.8- ??

ב. בגובה המכסימלי מהירות הגוף היא 0 ולכן $0 = -5 + 10t$

זה הזמן שלקח לגוף להגיע עד לגובה המכסימלי מ**נק' המוצא**.

והוא 0.5 שנ' .

והמרחק הוא $X = -5*0.5 + \frac{1}{2}*10*0.5^2 = -1.25\text{מ}$

כלומר מהקרקע הגובה הוא 201.25 מ'.

ג. גובה של 60מ' מהקרקע הוא 140מ' מנק' המוצא. נציב בנוסחא

$140 = -5t + 5t^2$

או $t^2 - t - 28 = 0$

בפתרון המשוואה הריבועית נקבל $t_1 = 5.8$ ו $t_2 = -4.8$

וזה הזמן שלקח לגוף מרגע הזריקה (בנק' המוצא) 5.8שנ'

ד. ראינו כבר בתשובה ב' 0.5שנ'

ה.בשניה הרביעית לתנועתו המרחק יהיה: המרחק שעבר במשך 4 שנ' לתנועתו פחות המרחק שעבר במשך 3 שנ' לתנועתו. מכאן

המרחק במשך 4 שנ' $X_4 = -5*4 + 0.5*10*4^2 = 60\text{מ}$

ובמשך 3 שנ' $X_3 = -5*3 + 0.5*10*3^2 = 30\text{מ}$

המרחק שעבר בשניה הרביעית יהיה $\Delta X = 60 - 30 = 30$

ו. נציב t=6 ונקבל $X = -5*6 + 0.5*10*6^2 = 150\text{מ}$ ומהקרקע 50מ'

ז. מתוך תשובות א' וב' נוכל לחשב את הזמן שהגוף צנח חופשית (ממהירות 0) בגובה המכסימלי.

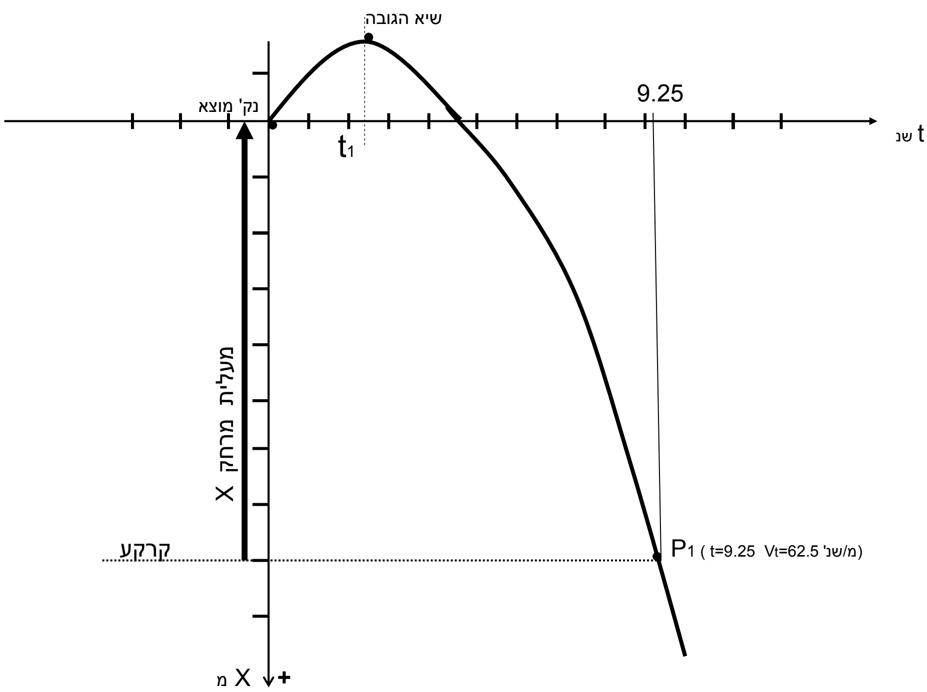
ראינו כי כל הזמן מנק' המוצא עד לקרקע הוא 6.8שנ' ועד לגובה המכסימלי הוא 0.5שנ' לכן הגוף צנח במשך 6.3 = 0.5 – 6.8

והמהירות תהיה $V_t = 0 + 10*6.3 = 63\frac{\text{מ}}{\text{שנ}}$

ניקח דוגמא אחרת:
מעלית נעה מהקרקע בתנועה שוות תאוצה כלפי מעלה ולאחר מספר שנ' נשמט ממנו גוף אשר פגע בקרקע כעבור 9.25שנ' ובמהירות של 62.5מ/שנ חשב
א. מה היתה מהירות הגוף ברגע שנשמטה?
ב. חשב את הזמן שעבר מרגע שנשמט עד שהגיע למכסימום הגובה?
ג. באיזה גובה מפני הקרקע הגוף נשמט?
ד. לאיזה גובה מכסימלי מהקרקע הגוף הגיע?
ה. כמה זמן לקח למעלית להגיע לגובה ממנו נשמט הגוף?
ו. מהי תאוצת המעלית?

תשובות

ראשית נסתכל על הגוף ואחר כך על המעלית . מהירות הגוף ברגע שנשמט היא כמהירות המעלית ברגע זה והמרחק X זהה לשניהם.
נחלק את תנועת הגוף לפרקי זמן. לנו ידוע כי הגוף פגע בקרקע לאחר 9.25 שנ' . נתאר את הגרף



א. נקבע כי נק' המוצא היא למעלה והקרקע בכיוון חיובי כלפי מטה
הגוף עבר מרחק של $X = V_0 * 9.25 + 0.5 * 10 * 9.25^2$
הגוף עבר מנק' המוצא עד למכסימום (מהירות 0) במשך t_1 שנ'
נחשב את הזמן הזה $0 = -V_0 + gt_1$ מכאן נקבל כי $t_1 = \frac{V_0}{g}$
סה"כ הגוף נע עד הפגיעה בקרקע 9.25 שנ' אם נוריד את t_1 נקבל את הזמן שהגוף צנח חופשית משיא הגובה (מהירות 0) עד שפגע בקרקע במהירות של 62.5מ/שנ' לכן $62.5 = (9.25 - \frac{V_0}{10}) * 10$
מכאן נקבל את $V_0 = 30$ מ/שנ'

ב. נחשב את הזמן t_1 $t_1 = \frac{30}{10} = 3שנ$

ג. נחשב את הגובה ממנו נשמט הגוף (זה גם המרחק של המעלית)

$$X = -30 * 9.25 + \frac{1}{2} + 10 * 9.25^2 = 150מ$$

ד. הגובה המכסימלי הוא $X_1 = \frac{1}{2} g t^2 = 5 * 3^2 = 45מ$ מנק' המוצא

ולכן מפני הקרקע יש להוסיף עוד 150מ' ונקבל 195מ'

ה. המעלית החלה ממהירות 0 בתאוצה a וברגע שהגוף נשמט
היא היתה בגובה של 150מ' נחשב את זמן עלית המעלית

$V_{מעלית} = 30 = a * t_2$ ו $150 = \frac{1}{2} a t_2^{\,2}$ נציב

$150 = \frac{1}{2} * a t_2 * t_2 = \frac{1}{2} * 30 t_2$ מכאן נקבל $t_2=10$

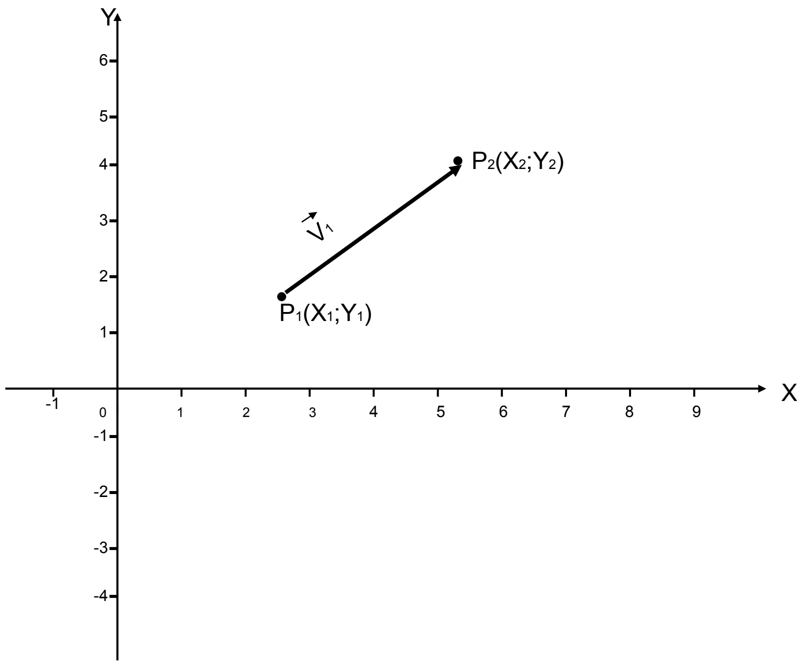
ו. ותאוצת המעלית היא $a = \frac{30}{10} = 3 \frac{מ}{שנ^2}$

אפשר גם בדרך אחרת.
אם מהירות הפגיעה היא 62.5 מ/שנ אזי משיא הגובה לקח לגוף
$62.5 = 0 + 10t$ ו $t=6.25$ שנ' אם כל הזמן היה 9.25 שנ הרי שעד
שיא הגובה לקח $t_1=9.25-6.25=3$שנ'
ומכאן אנו מוצאים את $V_0=30$ מ/שנ
וכך נוכל להמשיך.

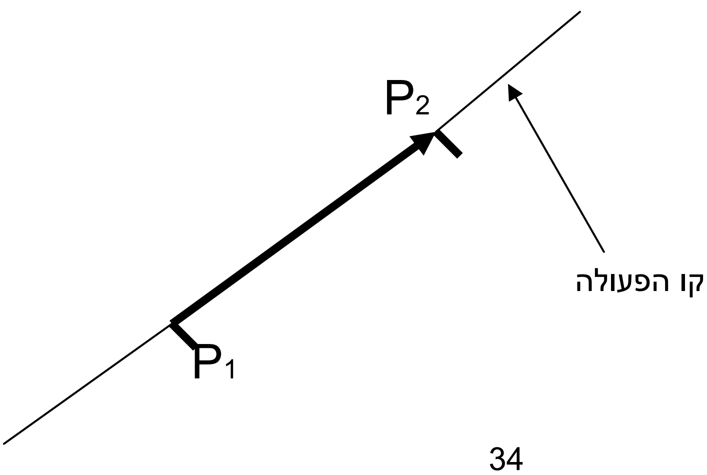
וקטורים

גודל פיזיקלי אשר יש חשיבות לכיוון נקרא וקטור.
דוגמא לגדלים וקטוריים הם מהירות, מרחק, תאוצה, כוח ועוד.
גדלים פיזיקליים שאין חשיבות לכיוון נקראים סקלר לדוגמא:
זמן, נפח, מסה ועוד.
אנו נחליט לאיזה כיוון ניתן את הסימן + ולכיוון המנוגד ב- 180^0 ניתן את הסימן - . גודל וקטורי מסמנים עם חץ מעליו $\vec{V}$ או $\vec{F}$.
תיאור גיאומטרי של וקטור הוא קו עם ראש חץ

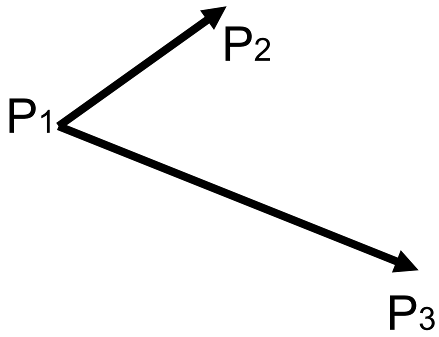
כאשר אורך הקו מציין את עוצמתו והחץ את כיוונו.
ובמערכת צירים



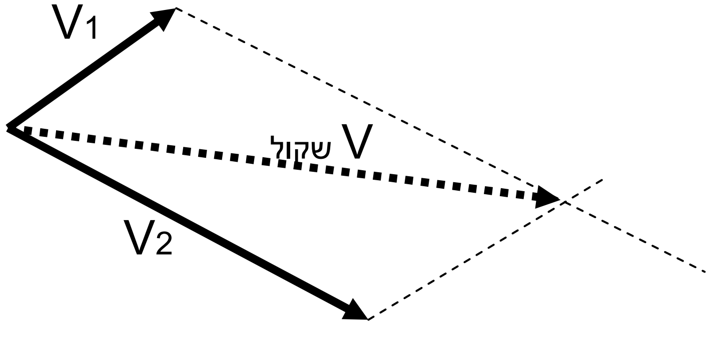
נק' המוצא של הוקטור הוא בתחתית הקו הנק' P1 .
לאורך כיוון הוקטור נקרא "קו הפעולה" של הוקטור וניתן להזיזו בכיוון ומבלי לשנות את אורכו.



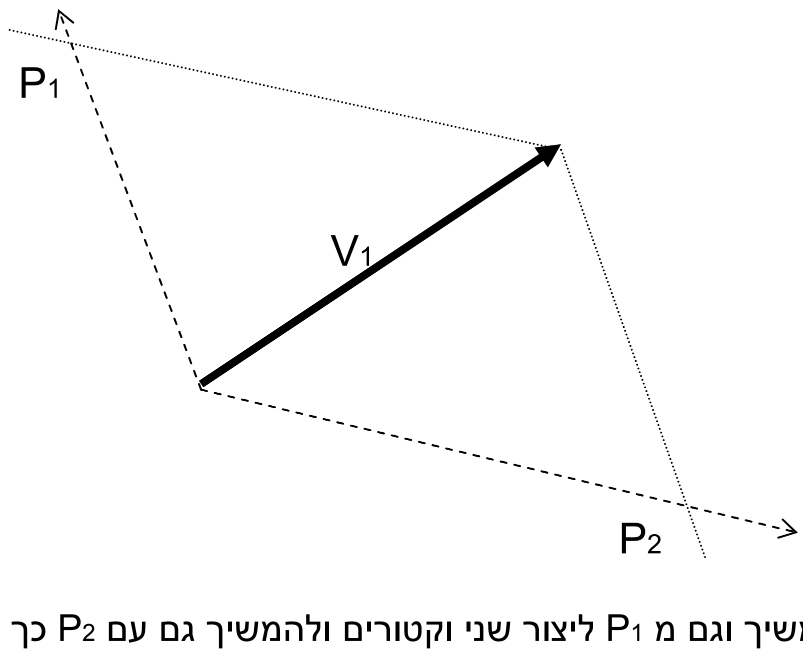
נראה מה קורה באם 2 וקטורים פועלים על גוף.



הקטע P_1-P_2 הוא V_1 והקטע P_1-P_3 הוא V_2 .
את 2 הוקטורים הללו יכולים לאפיין על ידי וקטור אחד הנקרא הוקטור השקול אשר זהה לתוצאה של 2 הוקטורים.
לדוגמא 2 סוסים מושכים עגלה לכיוונים שונים העגלה תנוע לכיוון כלשהוא שנוכל לאפיין כאילו שסוס אחד המושך לאותו הכיוון.
כיצד נמצא את הוקטור השקול.
חיבור וקטורים: $\vec{V}$שקול $= \vec{V}_1 + \vec{V}_2$
אם ניקח את הדוגמא לעיל ונניח כי 2 הסוסים מושכים בכיוונים מנוגדים, העגלה תישאר במקומה אולם אם סוס אחד ימשוך בעוצמה גדולה יותר העגלה תנוע לכיוון החזק אבל לא באותה עוצמה שהיה פועל לבד.
זה כאשר 2 הוקטורים הם על אותו קו פעולה. במקרה זה הוקטור השקול יהיה ההפרש בין 2 הוקטורים. ואם שניהם פועלים באותו הכיוון השקול יהיה הסכום שלהם. ומה קורה כאשר הוקטורים כל אחד בכיוון שונה כשם שבגרף למעלה ?.
עיקרון המקבילית: על מנת לקבל את הוקטור השקול ל 2 וקטורים שונים יש לבנות מקבילית והאלכסון הינו הוקטור השקול (בעוצמה ובכיוון).

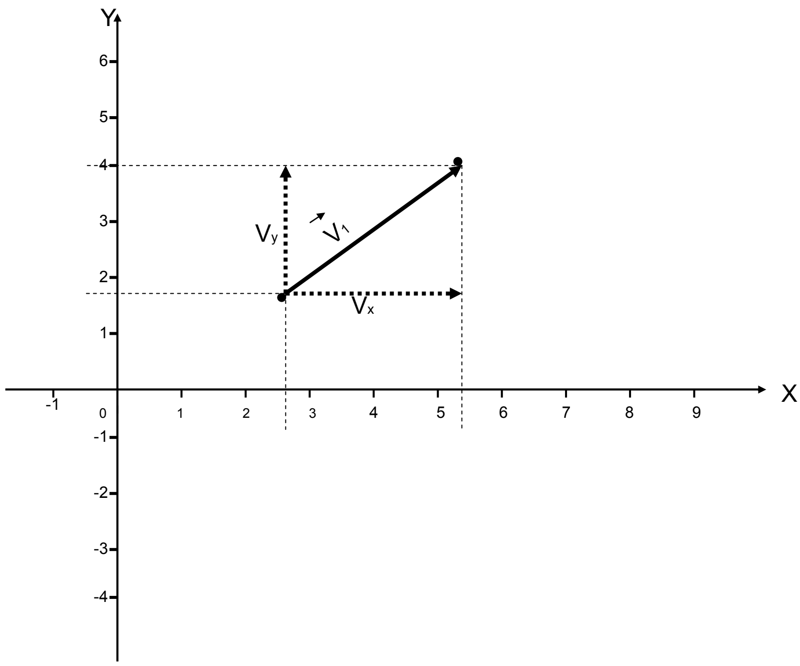


אם שני הוקטורים הם על אותו קו פעולה (הזוית ביניהם היא 180^0) אז השקול הוא חיבור רגיל כאשר הם באותו כיוון וכשהם מנוגדים בכיוונם, אז השקול הוא ההפרש ביניהם ולכיוון הגדול מביניהם.
אנו ראינו כיצד בעזרת עיקרון המקבילית אנו מוצאים שקול של שני וקטורים היוצאים מנק' אחת ויש ביניהם זוית כלשהיא α .
בעזרת נוסחאות טריגונומטריות נוכל לחשב ולמצוא את השקול - נראה בעתיד.
ניקח עכשיו 3 וקטורים היוצאים מנק' אחת בכיוונים שונים ונראה כיצד נמצא את השקול. ראשית ניקח 2 וקטורים וכפי שראינו נמצא את השקול של 2 אלה , ואז ניקח את השקול שמצאנו ועם הוקטור ה-3 נעשה שוב לפי עיקרון המקבילית וכך נמצא את השקול לשלושת הוקטורים. בשיטה זו נוכל למצוא שקול לכל מספר של וקטורים נתונים.
כשם שניתן לאחד וקטורים לוקטור שקול , כן ניתן לפרק וקטור ל2 מרכיבים. נעשה זאת גם בעזרת עיקרון המקבילית.
נתון וקטור V_1 אנו ניצור מקבילית כך שהאלכסון יהיה הוקטור הנתון.
נמתח שני קוים (מקוקוים) בכיוונים כלשהם ונבנה מקבילית (קוים מנוקדים) נקודות המפגש P_1 ו P_2 יתנו שני וקטורים במקום הוקטור V_1 .



כך ניתן להמשיך וגם מ P_1 ליצור שני וקטורים ולהמשיך גם עם P_2 כך שנוכל ליצור הרבה וקטורים אשר מאפיינים את הוקטור הראשי ממנו יצאנו.
את הקוים המקוקוים יכולנו לבחור בכל מיני כיוונים והיינו מקבלים וקטורים אחרים המאפיינים את V_1 .
לפרק וקטור ל2 מרכיבים חייבים לקבל 2 נתונים על המרכיבים כגון כיוון וגודל של אחד מהם, או כיוון של אחד והזוית שבינו ובין השני.

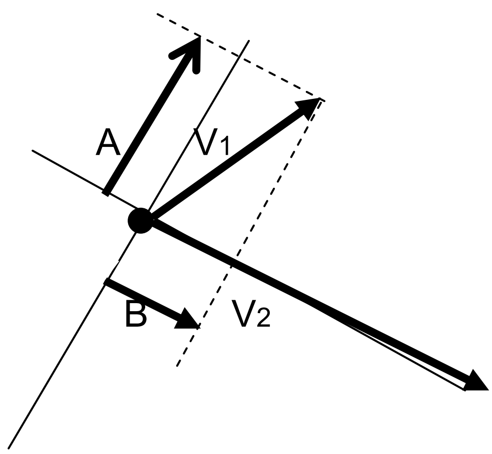
על מנת לפרק וקטור לשני מרכיבים, אנו ניקח מערכת צירים ישרת זוית כפי שאנו מכירים ממישור Y,X ואז נפרק את הוקטור הנתון ל-V_x ול- V_y .



וכאן אנו יכולים להשתמש במשפט פיתגורס $V_1^2 = V_x^2 + V_y^2$

ובעזרת טריגומטריה אנו יכולים למצוא את גודלם וכיוונם.

אחת השיטות למציאת וקטור שקול היא לפרק את אחד הוקטורים ל2 מרכיבים ישרי זוית, כאשר אחד המרכיבים יהיה בכיוון של הוקטור השני. נפרק את V_1 לשני מרכיבים אחד בכיוון של V_2 ואחד בכיוון מאונך לו ואז נקבל: שני וקטורים A ו B .

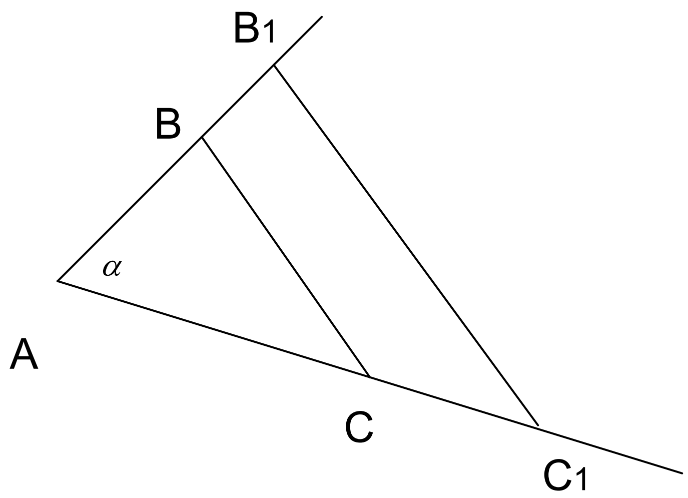


את B נוסיף ל V_2 (באותו כיוון)

ונמצא על פי עיקרון המקבילית את הוקטור השקול שבין $(V_2 + B)$ ובין A.

נראה עכשיו כמה תכונות גיאומטריות לגבי משולשים ולישר זוית במיוחד..

ידוע כי במשולשים דומים היחס בין הצלעות המתאימות שווה



יש לנו 2 משולשים דומים ΔABC ומשולש ΔAB_1C_1 היחס בין הצלעות

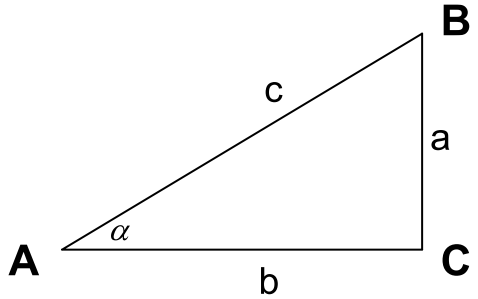
$$\frac{AB}{AB_1}=\frac{AC}{AC_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$$

ולכן
$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB_1}{AC_1}$$

כלומר היחס בין צלעות במשולש אחד זהה ליחס שבין הצלעות במשולש השני, והוא תלוי בזוית α בלבד.
אם ניקח משלש **ישר זוית** ובו זוית α הרי שהיחס הזה יהיה שוה לכל משלש ישר זוית בעל זוית α.
את היחס הזה נוכל לחשב לגבי כל זוית α ונקבל טבלה הנותנת לנו את יחסי הצלעות במשלש ישר זוית.

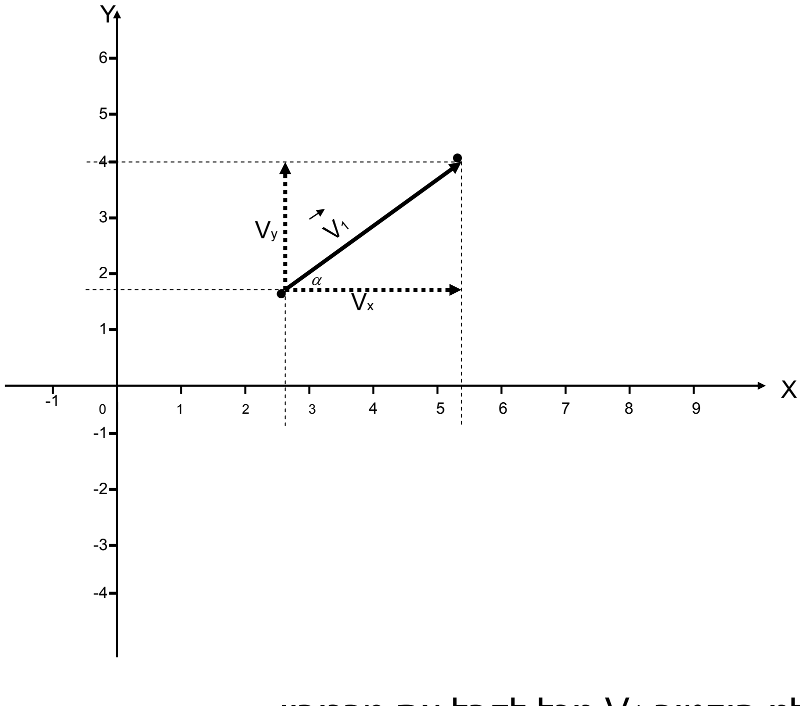
מכאן נראה שיחס בין הצלעות במשלש ישר זוית הוא פוקציה של הזוית α.
הפונקציות האלו הן פונקציות טריגונומטריות ונקראות:

טנגנס α ומסמנים $\tan\alpha$, סינוס α מסמנים $\sin\alpha$ וקוסינוס α מסומן $\cos\alpha$.



$$\tan\alpha=\frac{a}{b}$$
$$\sin\alpha=\frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha=\frac{b}{c}$$

a הוא הניצב שממול הזוית α
b הוא הניצב שליד (הבסיס) הזוית α
c הוא היתר שבמשולש ישר הזוית.
היחסים שבין הצלעות הללו נתונים בתוך טבלאות המצויות בכל מחשבון מדעי.
ניקח לדוגמא $\alpha = 45^0$ זה משלש שוה שוקיים ישר זוית נקבל:
$\tan\alpha = 1$ **ובזוית זו** $\sin\alpha = \cos\alpha = 0.707$
או $\alpha = 30^0$ **נקבל ש** $\sin 30 = 0.5$ **ו** $\cos 30 = 0.866$ $\tan 30 = 0.577$
וכך לגבי כל זוית וזוית.
מאחר והמשולש הוא ישר זוית אזי משפט פיתגורס חל עליו
$a^2 + b^2 = c^2$ **ומזה ניתן לקבל זהויות טריגונומטריות למשל:**
נחלק את כל המשוואה ב c^2 נקבל $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c} = 1$
וזה נותן $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ **וכך עוד.**
בפונקציות sin, cos, tan נשתמש למציאת וקטור שקול.
ברגע שפירקנו וקטור לשני מרכיבים ישרי זוית, נשתמש בפוקציות.



אם ידוע לנו הוקטור V1 נוכל לקבל את מרכיביו
$V_x = V_1 * \cos\alpha$ **ו-** $V_y = V_1 * \sin\alpha$
לדוגמא אם $\alpha = 40^0$ $V_1 = 10\frac{מ}{שנ}$
מתוך המחשבון $\sin 40 = 0.58778$ **ו** $\cos 40 = 0.80901$
ומכאן Vy=10*0.58778=5.88 , Vx=10*0.80901=8.09
נוכל גם למצוא את הזוית באם ידוע לנו היחס למשל באם ידוע
ש $\frac{a}{c} = 0.58778$ קיימת במחשבון פונקציה "הפוכה" הנקראת $\sin^{-1}$
ובעזרתה נקבל שהזוית המתאימה היא $\alpha = \sin^{-1} 0.58778 = 40^0$

זריקה אופקית

כאשר גוף נזרק אופקית מגובה מסוים הוא ינוע במסלול המורכב משני תנועות:

א. תנועה שוות מהירות בכיוון אופקי X

ב. נפילה חופשית בכיוון הקרקע עקב כוח הכבידה.

הגוף נע אופקית ובו בזמן נופל כלפי הקרקע.

שתי התנועות מתחילות בו בזמן ויוצאות מאותה נק' מוצא.

הגוף נעצר רק כאשר הוא פוגע בקרקע. לכן זמן התנועה הקצובה זהה לזמן תנועת הגוף בנפילה חופשית.

ברגע ההתחלה הגוף נזרק אופקית ולכן המרכיב האנכי כלפי הקרקע הוא 0 . ואילו כלפי האופק המהירות ההתחלית V_{x0}.

נסתכל בנפרד על כל אחת מהתנועות.

בתנועה האופקית שוות המהירות, המרחק האופקי הוא $X = V_{x0} * t$

ובנפילה החופשית כלפי הקרקע, המרחק האנכי הוא $Y = \frac{1}{2} g * t^2$

אם ידועים לנו שני נתונים כגון מהירות הזריקה האופקית והגובה ממנו נזרק, נוכל לחשב את הזמן ואת המרחק האופקי.

לדוגמא: נניח כי גוף נזרק במהירות של 10מ/שנ לכיוון האופק ומגובה של 80 מ' . חשב כעבור כמה זמן יפגע בקרקע ומה המרחק האופקי שעבר.

נציב בנוסחת המרחק האנכי $80 = \frac{1}{2} * 10 * t^2$

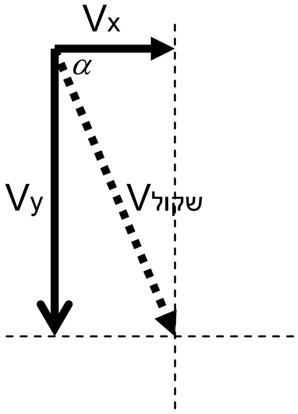
נקבל את זמן תנועת הגוף עד פגיעתו בקרקע $t = \pm 4$ שנ'

נציב את הזמן + בנוסחת המרחק האופקי $X = 10 * 4 = 40$ מ'

ואם נרצה לדעת את מהירות הפגיעה בקרקע ואת זוית הפגיעה ?

נחשב את המהירות האנכית לאחר 4 שנ' $V_y = 0 + g * t = 10 * 4 = 40$

המהירות האופקית שווה 10 מ/שנ לכן נקבל 2 וקטורים ישרי זוית



לפי פיתגורס $V_{\text{שקול}}^2 = 10^2 + 40^2$

$V_{\text{שקול}}$=38.73 מ/שנ

ואת זוית נפגיעה $\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{40}{10} = 4$

ונקבל $\alpha = \tan^{-1} 4 =\sim 76^0$

דוגמא נוספת: מראש מגדל נזרק אופקית גוף שפוגע בקרקע במרחק של 81.6 מ' מבסיס המגדל ובזוית של 80^0 לקרקע.
חשב את גובה המגדל ואת המהירות האופקית בה נזרק הגוף.

פתרון: אנו נסתכל על שתי תנועות
א. אופקית בה המהירות האופקית קבועה Vx
ב. אנכית בה הגוף נופל חופשית מנק' המוצא ופוגע בקרקע Vy.
הזמן בשתי התנועות עד הפגיעה בקרקע הוא זהה t .
בתנועה האופקית – המרחק שהגוף עבר הוא X= 81.6
ולכן $X = V_x * t$ (1
ובתנועה האנכית – המרחק שהגוף עבר עד הקרקע הוא Y
(הכיוון + כלפי מטה) וממהירות התחלתית 0 , ולכן $Y = \frac{1}{2} g * t^2$ (2
והמהירות $V_y = 0 + g * t$ (3
מהירות הפגיעה בקרקע נסמן ב-V והזוית היא $\alpha = 80^0$
לכן $V_x = V\cos 80$ ו $V_y = V\sin 80$
נציב במרחק X $81.6 = V(\cos 80) * t$ (11
מכאן נקבל $V * t = \frac{81.6}{\cos 80}$ (12
את Vy ראינו $V_y = g * t = V * \sin 80$ (31
נסתכל על המרחק Y $Y = \frac{1}{2} * g * t^2 = \frac{1}{2} * g * t * t$ (21
אבל $g * t = V * \sin 80$ נציב זאת ב Y $Y = \frac{1}{2} * (V * \sin 80) * t$ (22
מתוך המרחק X (12) קבלנו את $V * t = \frac{81.6}{\cos 80}$ נציב ב(22) ונקבל

$$Y = \frac{1}{2} * V * t * \sin 80 = \frac{1}{2} * \frac{81.6}{\cos 80} * \sin 80$$

מתוך המחשבון $\sin 80 = 0.9848$ ו $\cos 80 = 0.17365$
מכאן אנו מקבלים $Y = 231.4\text{מ}$
ועכשיו גובה המגדל ידוע ומכאן נקבל את הזמן עד שפגע בקרקע.

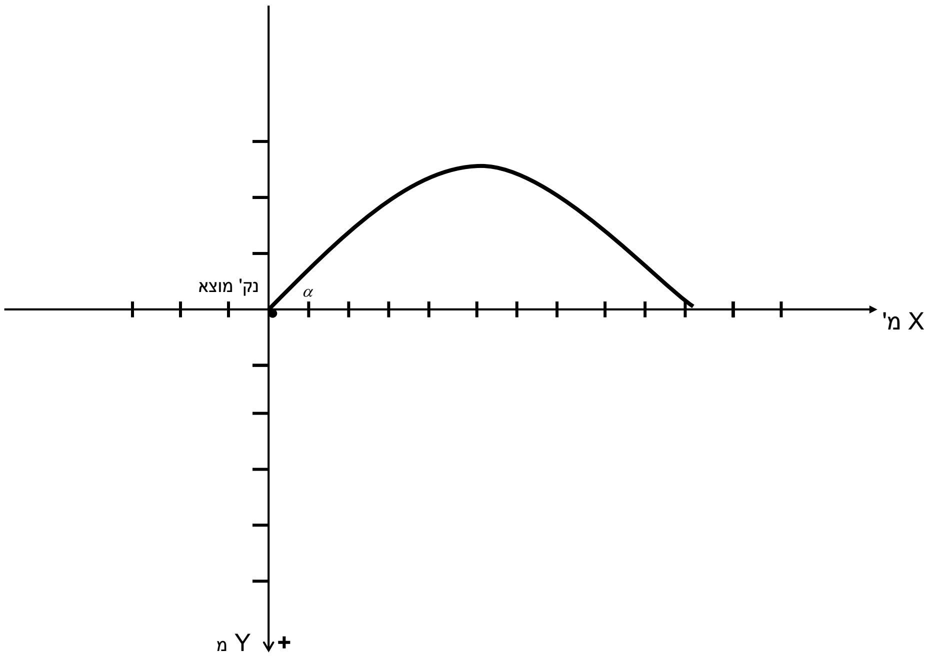
$$Y = \frac{1}{2} g t^2 = 5t^2 = 231.4$$

t = 6.8 שנ'
מכאן נוכל לקבל את V מתוך $gt = V\sin 80$ $V = 69.1\frac{\text{מ}}{\text{שנ}}$
ואת Vx מתוך $X = V_x * t$ נקבל $V_x = 12\frac{\text{מ}}{\text{שנ}}$

זריקה משופעת

התנועה המשופעת היא זריקה במהירות התחלתית V_0 ובזוית α כלפי האופק יכול להיות מעלה או מטה.

כשם שעשינו בזריקה אופקית חילקנו לשתי תנועות , כך גם כאן נחלק לשתי תנועות זריקה אופקית וזריקה כלפי מעלה או זריקה כלפי מטה.
ניקח את המרחק האופקי X ואת המרחק האנכי Y חיובי כלפי הקרקע.
נראה זאת במערכת צירים X ו Y (מרחקים).
הזמן מנקודת המוצא עד הפגיעה בקרקע זהה לשני המרחקים והוא t .



הגוף נע במסלול פרבולי עד פגיעתו בקרקע.
בזריקה אנכית כלפי מעלה ראינו שהמרחק הוא פונקציה פרבולית בזמן.
נפצל את המהירות V_0 לשני מרכיבים אופקי V_x ואנכי V_y .

$Vx = V_0 * \cos\alpha$ ו $Vy = V_0 * \sin\alpha$

נסתכל על התנועה האנכית אשר עליה פועל כוח הכבידה בתאוצה g .
ניקח את נק' המוצא כראשית X=0.

בזריקה אנכית כלפי מעלה ראינו שההעתק האנכי $Y = -V_{0y} * t + \frac{1}{2}gt^2$

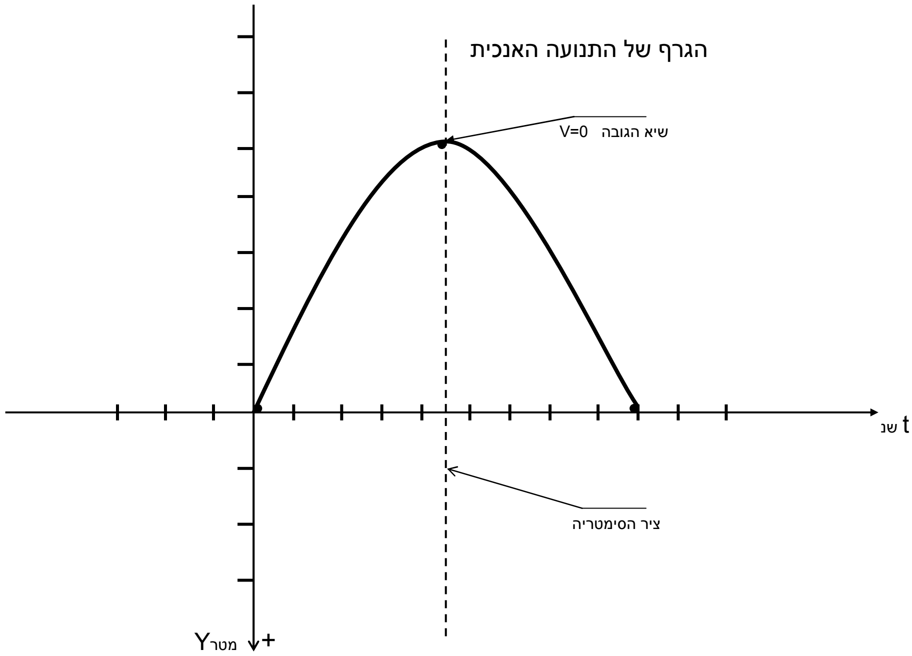
הסימן – של V_0 הוא כי הכיוון החיובי הוא כלפי הקרקע, (ראה בזריקה אנכית).

וההעתק האופקי בתנועה קצובה יהיה $X = V_{0x} * t = V_0 * \cos\alpha * t$

את ההעתק האופקי X ואת ההעתק האנכי Y קיבלנו כפונקציה של t .

$X = V_0 * \cos\alpha * t$ $\qquad$ $Y = -V_0 * \sin\alpha * t + \frac{1}{2}gt^2$

וזו משוואה ריבועית $Y = At^2 + Bt + C$. הציר הסימטרי הוא כאשר הגוף מגיע למכסימום הגובה והוא יהיה $t = \frac{-B}{2A} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$ ציר



אם נציב בנוסחת ההעתק Y=0 נוכל לקבל את הזמן שעבר הגוף מנק' המוצא ועד שיגיע חזרה לאותו גובה (שם ההעתק אפס).

$$Y = 0 = -V_0 \sin\alpha * t + \frac{1}{2} g t^2$$

ונקבל 2 פתרונות ל t . $t_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ $t_1 = 0$

נציב את t2 בנוסחת ההעתק האופקי X ונקבל $X = V_0 * \cos\alpha * t_2$

$$X = V_0 * \cos\alpha * \frac{2V_0 * \sin\alpha}{g} = \frac{2V_0^2 * \sin\alpha * \cos\alpha}{g}$$

מתוך המתמטיקה יודעים כי $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$

ומכאן נקבל את ההעתק האופקי (אשר בגובה של נק' המוצא)

$$X = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

ראינו את הזמן עד שהגוף יגיע למכסימום הגובה (בציר הסימטריה):

$$t = \frac{V_0 * \sin\alpha}{g}$$

והגובה המכסימלי (מנק' המוצא) שהגוף יגיע אליו יהיה:

$$Y_{\text{מכסימום}} = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{V_0^2 (\sin\alpha)^2}{2g}$$

דוגמא 1: פגז נורה מתותח בזוית של 40^0 כלפי מעלה במהירות של 150מ/שנ'

חשב את המרחק האופקי אליו יגיע הפגז ואת הגובה המכסימלי.

ניקח את נק' המוצא כראשית X=0 .

המרחק האופקי כפי שראינו הוא $X = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$

מהמחשבון נמצא כי $\sin 40 = 0.6428$ ו- $\sin 80^0 = 0.9848$ נציב

$$X = \frac{150^2 * 0.9848}{10} = 2216\text{מ}$$

והגובה יהיה $Y = \frac{v_0^2 * \sin^2 \alpha}{2g} = 465\text{מ}$

נחשב את זמן מעוף הפגז עד פגיעתו בקרקע .

ראינו $t_2 = \frac{2v_0 * \sin\alpha}{g}$ נציב $t_2 = \frac{2*150*0.6428}{10} = 19.3\text{שנ}$

דוגמא 2:בראש הר שגובהו 500מ' מעל פני הים הוצב תותח בזוית של 30^0. פגז נורה במהירות של 200מ/שנ' ופגע בגג בנין שגובהו 50מ' מעל פני הים.

חשב: א. את הזמן עד הפגיעה

ב. את מרחק הבית מההר

ג. את מהירות הפגז ברגע הפגיעה ואת זוית הפגיעה.

כיוון הקרקע הוא הכיוון החיובי. $\sin 30 = 0.5$ $\cos 30 = 0.866$

נוסחת ההעתק ה**אנכי** $Y = -V_0 * \sin\alpha * t + \frac{1}{2}gt^2$

ההעתק מנק' המוצא עד ראש הגג הוא Y=500-50=+450 מ'

נציב $450 = -200 \sin 30 * t + 5t^2$

לאחר צמצומים נקבל $t^2 - 20t - 90 = 0$

$$t = \frac{20 \pm \sqrt{400+360}}{2} = \frac{20 \pm 27.6}{2}$$

מכאן נקבל את t_2=23.8 שנ ו- t_1= -3.8 שנ'

את מרחק הבית נחשב $X = V_0 \cos\alpha * t$

נציב $X = 200 * 0.866 * 23.8 = 173 * 23.8 = 4122\text{מ}$

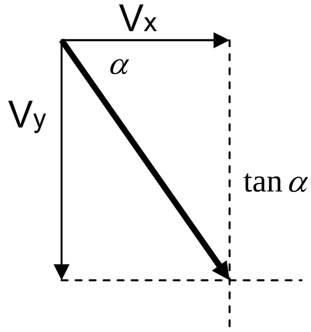
נחשב את V_{0y} כלפי מעלה - $V_{0y} = V \sin\alpha = 100\frac{\text{מ}}{\text{שנ}}$

נחשב את הזמן עד לגובה המכסימלי שם המהירות האנכית 0 .

ומכאן $V_{0y} = 100 = gt$ t=10 שנ

סה"כ זמן המעוף היה 23.8 ועד לגובה המכסימלי שנ' 10, מכאן שזמן הנפילה הוא 13.8שנ' ובזמן הזה הגוף צבר מהירות אנכית 138מ/שנ'.

נחשב את מהירות בפגיעה:



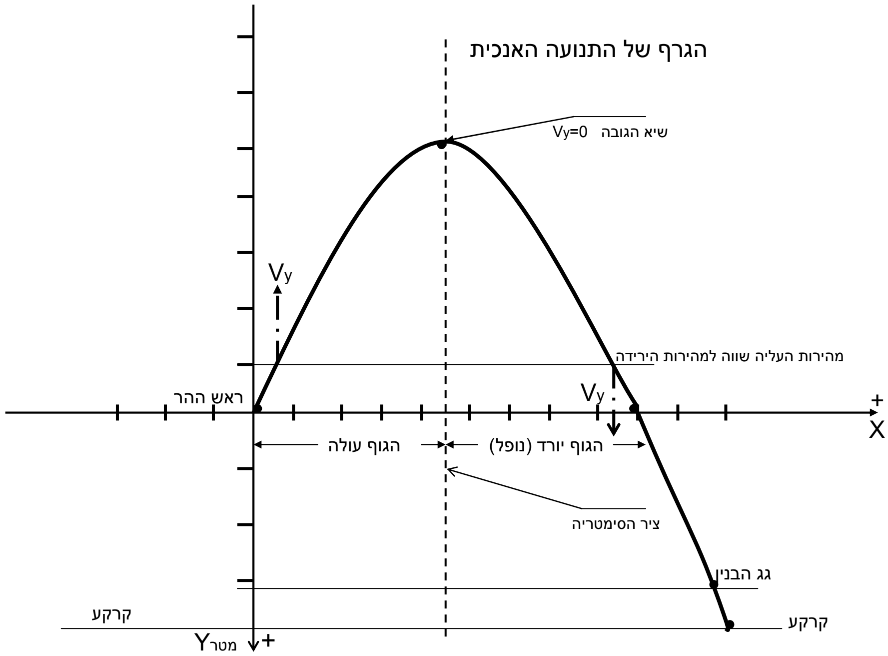
$$V^2 = V_x^2 + v_y^2 = 173^2 + 138^2$$

V=221מ/שנ

והזוית $\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{138}{173} = 0.7976$

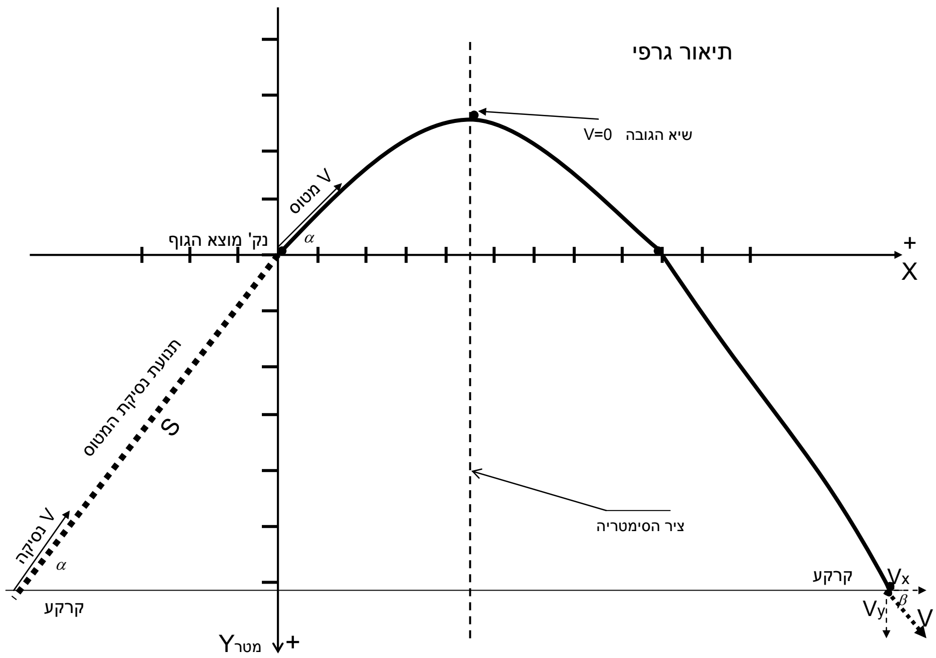
$\alpha =\sim 38^0$

שים לב, מאחר והפונקציה היא סימטרית זמן העליה שווה לזמן הירידה (עד לאותה נק') כלומר הגוף חזר לנק' המוצא כעבור 20שנ' שהם זמן העליה + זמן הירידה. לכן מנק' המוצא כלפי מטה הזמן הוא 23.8-(10+10) =3.8שנ' .
הסתכל מה קבלנו כשחישבנו את זמן המעוף. קיבלנו 2 תשובות ובחרנו את החיובית בלבד, אולם הפתרון השני (השלילי) הוא בדיוק הזמן כשהגוף יורד מנק' המוצא עד לפגיעה. כמו כן בגלל הסימטריה, בגובה זהה, מהירות העליה שווה למהירות הירידה.



דוגמא 3 :
מטוס נוסק כלפי מעלה בתנועה שוות תאוצה וכעבור 4 שנ' מרגע הנסיקה נשמט ממנו גוף אשר פוגע בקרקע לאחר 19.3 שנ' (מרגע שנשמט) במהירות של182 מ/שנ' ובזוית של 36^0 כלפי הקרקע .
חשב א. את זוית הנסיקה של המטוס
ב. את מהירות המטוס ברגע הנסיקה
ג. את תאוצת המטוס בנסיקה.

נראה את התיאור הגרפי.



נסמן את מהירות המטוס בנסיקה - Vנסיקה
את מהירות המטוס ברגע שנשמט הגוף - Vמטוס
את זוית הנסיקה α
את מהירות פגיעת הגוף בקרקע - V
את זוית פגיעת הגוף בקרקע β

הסבר: המטוס מתחיל לנסוק במהירות הנסיקה בתנועה שוות תאוצה.
המסלול S שהוא עובר עד לנק' המוצא הוא לפי הקו המקווקו.
עד שמגיע לנ' המוצא, המטוס צבר מהירות במשך 4 שנ'.
ברגע זה נשמט הגוף ומקבל את מהירות המטוס ואת זוית המטוס שאנו סימנו ב α. מכאו הגוף "נזרק" בזוית זו כלפי מעלה.
מרגע זה לוקח לגוף להגיע לקרקע 19.3שנ'.
הגוף פוגע בקרקע בזוית $\beta = 36^0$ ובמהירות של 182 מ/שנ'.

פתרון: נסתכל על תנועת כל אחד (הגוף והמטוס) בנפרד.
תנועת הגוף בזריקה משופעת:
נחשב על פי הפגיעה בקרקע את המרכיב האופקי ואת המרכיב האנכי של מהירות הפגיעה.
מתוך המחשבון נקבל $\sin 36 = 0.5878$ ו- $\cos 36 = 0.809$
המהירות האופקית היא תנועה קצובה ונשארת קבועה כל זמן התנועה והמהירות האנכית היא תנועה שוות תאוצה g . במהירות האנכית:
נחשב את הזמן שלקח להגיע ממכסימום הגובה (שם המהירות 0) עד הפגיעה. המהירות Vy בפגיעה:

$$V_y = V_{פגיעה} * \sin \beta = 182 * 0.5878 = 107 \frac{מ}{שנ}$$

ואת $V_x = V_{\text{פגיעה}} * \cos 36 = 182 * 0.809 = 147.2 \frac{\text{מ}}{\text{שנ}}$

הזמן מהגובה המכסימלי $V_y = 107 = 0 + gt$

מכאן הזמן הוא $t_1=10.7$ שנ'

סך כל הזמן היה 19.3שנ והנפילה 10.7 שנ'

זמן העליה עד למכסימום הגובה הוא $t1=19.3-10.7=8.6$ שנ'

מכאן נחשב את המהירות האנכית ברגע שהגוף

נשמט (כלפי מעלה) $V_{y\text{גוף}} = gt_1 = 10 * 8.6 = 86 \frac{\text{מ}}{\text{שנ}}$

וזו גם מהירות המטוס ברגע שהגוף נשמט.

המהירות האופקית היא קבועה מכאן נקבל לפי פיתגורס:

$$V_{\text{מטוס}}^2 = V_x^2 + V_y^2 = 147.2^2 + 86^2 = 29064$$

$$V_{\text{מטוס}} = 170.5 \frac{\text{מ}}{\text{שנ}}$$

את הזוית נחשב $\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{86}{147.2} = 0.5842$

$$\alpha = \tan^{-1} 0.5842 =\sim 30^0$$

נחשב עכשיו את הגובה ממנו נשמט הגוף

$$Y = -86 * 19.3 + \frac{1}{2} g * 19.3^2 = 202.5\text{מ}$$

ועכשיו נתייחס למטוס:

נחשב את המרחק שהמטוס עבר. ידוע לנו הזוית והגובה

$$\sin 30 = 0.5 = \frac{Y}{S_{\text{מטוס}}} = \frac{202.5}{S}$$

$S_{\text{מטוס}}=405$ מ'

תאוצת המטוס a והוא נע במשך 4שנ' והגיע למהירות 170.5מ/שנ

לכן $S = 405 = V_0 * 4 + \frac{1}{2} a * 4^2$

כמו כן $V = 170.5 = V_0 + a * 4$

יש לנו 2 משוואות ו 2 נעלמים . נחלץ את V_0 ונציב ב S

$$405 = (170.5 - 4a) * 4 + \frac{1}{2} a * 16 \qquad V_0 = 170.5 - a * 4$$

מכאן נקבל $8a = 277$

$$a = \frac{277}{8} = 34.6 \frac{\text{מ}}{\text{שנ}^2}$$

ומכאן נמצא את מהירות הנסיקה:

$$170.5 = V_0 + 34.6 * 4$$

$V_0=\sim 32$ מ/שנ

זריקה משופעת כלפי מטה.

זריקה משופעת כלפי מטה נטפל כפי שעשינו לגבי זריקה משופעת כלפי מעלה. הגוף נזרק בזוית α ובמהירות V_0 כלפי מטה.
נחלק ל-2 תנועות שאנו מכירים
א. זריקה אופקית
ב. זריקה אנכית כלפי מטה

בזריקה האופקית V_{0x} נשאר קבוע כל זמן התנועה
ובזריקה אנכית V_{0y} הגוף צובר מהירות בתאוצה g .
זמן התנועה זהה ב-2 התנועות והוא t .
ניקח את נק' המוצא כראשית X=0 וחיובי כלפי מטה.
נפצל את V_0 למרכיביו בכוון X ובכוון Y .

$V_{0x} = V_0 * \cos\alpha$ ו $V_{0y} = V_0 * \sin\alpha$

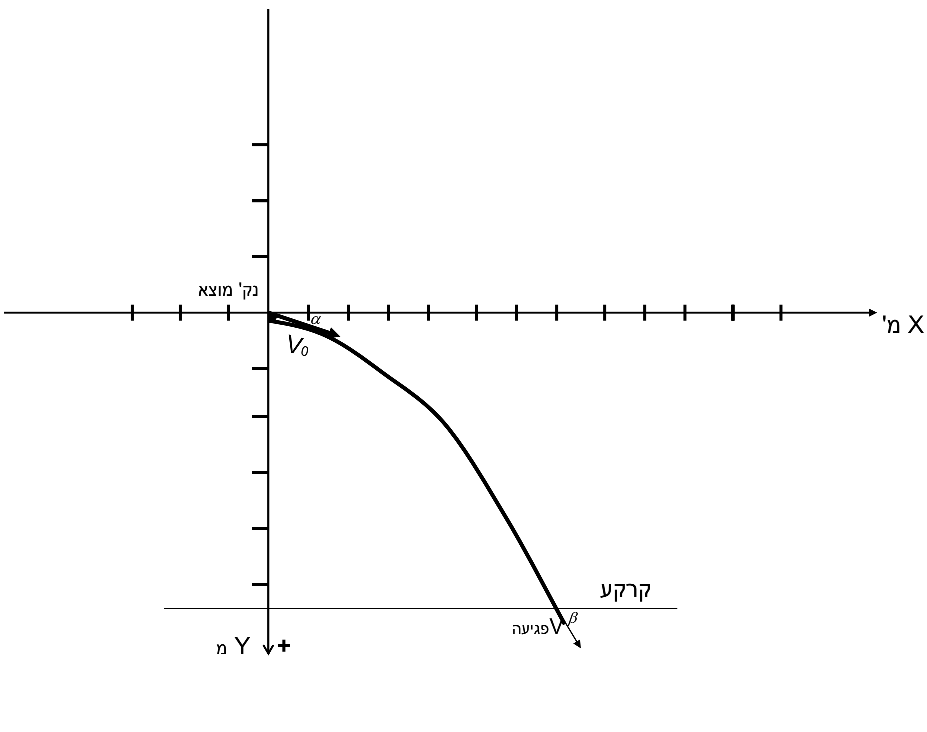
$X = V_{0x} * t$ ו $Y = V_{0y} * t + \frac{1}{2} g t^2$

מהירות הפגיעה בקרקע היא $V_{\text{פגיעה}}$ וזוית הפגיעה היא β

המהירות האנכית בפגיעה $V_y = V_{0y} + gt = V_0 * \sin\alpha + gt$

דוגמא: מטוס צולל בזוית $\alpha = 40^0$ ובמהירות של 250 מ/שנ' .
המטוס מטיל פצצה הפוגעת במטרה כעבור 20שנ' . חשב
א. את המרחק האופקי של המטוס ברגע הטלת הפצצה.
ב. את המהירות והזוית ברגע הפגיעה.

נתאר את התנועה



נחשב את המרכיבים האופקי והאנכי של V_0 .

מהמחשבון נמצא $\sin 40 = 0.6428$ ו $\cos 40 = 0.766$

$V_{0x} = 250 * 0.766 = 192.5 \frac{מ}{שנ}$ ו- $V_{0y} = 250 * 0.6428 = 160.7 \frac{מ}{שנ}$

זמן התנועה הוא 20 שנ' והמרחק האופקי

$X = 192.5 * 20 = 3850מ$

נחשב את V_y $V_y = V_{0y} + gt = 160.7 + 10 * 20 = 360.7 \frac{מ}{שנ}$

מכאן נחשב את $V_{פגיעה}$ (לפי פיתגורס) $V^2_{פגיעה} = V^2_{0x} + V^2_y$

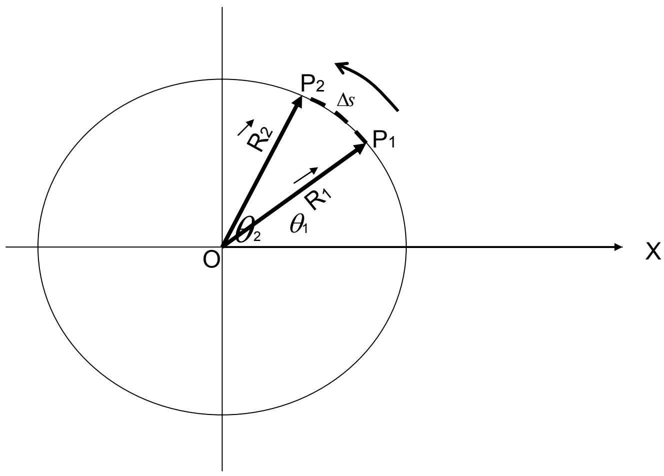
$V_{פגיעה} = \sqrt{192.5^2 + 360.7^2} = 408.8 \frac{מ}{שנ}$

והזוית β נחשב לפי tan $\tan\beta = \frac{V_y}{V_{0x}} = \frac{360.7}{192.5} = 1.8737$

$\beta = \tan^{-1} 1.8737 =\sim 62^0$

תנועה מעגלית

תנועה מעגלית היא תנועה של גוף על קשת של מעגל בעל רדיוס R .
תנועה זו שונה מתנועה לאורך קו ישר אשר ראינו, בזה שהגוף הנע במעגל נמצא תמיד במרחק קבוע ממרכז המעגל O .



נסתכל על הרדיוס כעל וקטור המכוון אל הגוף הנע על הקשת, הגודל שלו נשאר קבוע אבל כוונו משתנה בכל רגע של תנועת הגוף.
מהירות הוא גודל וקטורי, לכן אם משתנה גודלה או כיוונה או שניהם הרי שקיימת תאוצה.
אם הגוף נע במעגל מנק' P_1 לעבר P_2 במהירות כלשהיא, בנק' P_1 יש לו רדיוס וקטור R_1 ובנק' P_2 רדיוס וקטור R_2 וזויות θ_1 ו θ_2 בהתאמה.
לגוף יש מהירות קוית (משיקית) בכיוון המשיק בנקודות בהם הוא עובר, וכיוון המשיק משתנה כל זמן התנועה.
המהירות הקוית אינה משנה את גודל הרדיוס וקטור, אלא רק את קצב שינוי הזוית של הרדיוס וקטור.
גוף הנע לאורך קשת של מעגל יוצר שני סוגים של מהירויות:
א. מהירות לאורך הקשת – מהירות קוית
ב. מהירות שינוי הזוית (הסיבוב) – מהירות זויתית.

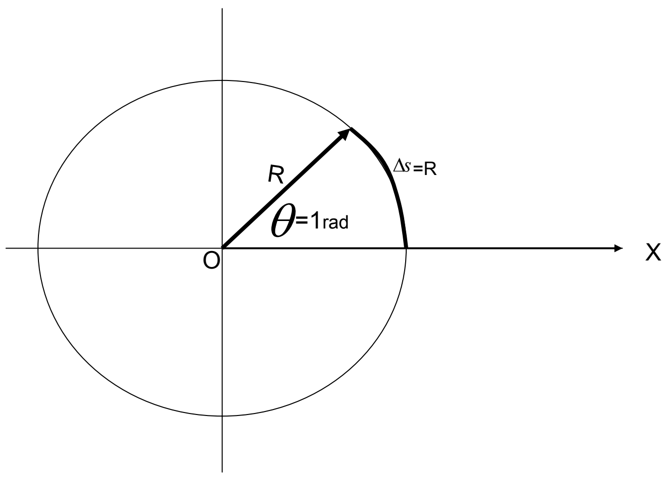
מהירות לאורך הקשת – מהירות קוית

נסמן את אורך הקשת שהגוף עבר ב ΔS ואת הזמן ב Δt .
נגדיר את המהירות הקוית V $\qquad V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$
זו בעצם הדרך שהגוף עבר פיזית בזמן Δt .
זה כאילו שאנו מסתכלים על הקשת כ"קו ישר" שלאורכו הגוף נע.

הגוף יכול לנוע על הקשת מהר יותר או לאט יותר , זה לא משנה את הרדיוס וקטור.
אם ניקח פרקי זמן קצרים מאוד dt ואת הדרך שעבר בזמן זה ds .
נקבל את המהירות הקוית הרגעית וכיוונה יהיה המשיק בנקודה.
אם בכל פרק זמן Δt הגוף יעבור אותה דרך (אורך הקשת) ΔS אנו אומרים שהגוף נע במהירות קוית (משיקית) קבועה.

$$V_{קוית} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

את אורך הקשת במעגל מודדים עלפי הרדיוס והזוית θ .
נגדיר עכשיו זוית הנקראת רדיאן (rad).
rad רדיאן זו הזוית הנוצרת כאשר אורך הקשת שווה בדיוק לרדיוס.



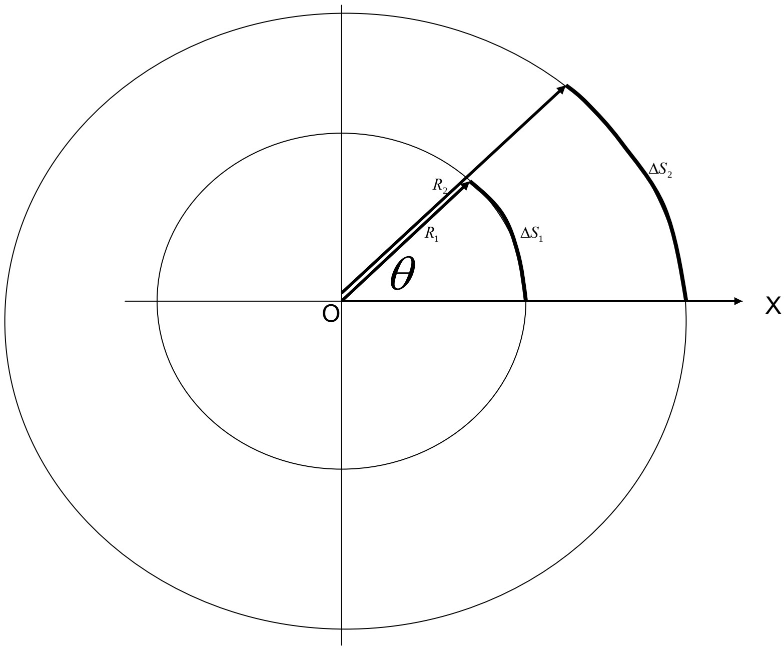
ידוע כי הקף המעגל הוא $2\pi * R$ זה אומר כי הרדיוס נכנס 2π פעמים בתוך הקף מלא של מעגל. כלומר 2π הוא בעצם זוית ברדיאנים של הקף מלא (360^0). אם ניקח זוית של רדיאן 1 אזי אורך הקשת הוא R ואם ניקח 2 רדיאנים אורך הקשת יהיה 2R
לכן $\Delta S = R * \theta$
כאשר הזוית θ היא ברדיאנים.
כאשר הגוף נע במעגל הזוית θ גם היא משתנה.

מהירות שינוי הזוית – מהירות זויתית

את המהירות הזויתית נגדיר כשינוי הזוית של הרדיוס וקטור ביחידת זמן.
נסמן את המהירות הזויתית ב ω

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

בפרקי זמן קצרים מאוד שינוי הזוית יהיה המהירות הזויתית הרגעית.
יחידות המהירות הזויתית הן $\frac{\text{רדיאן}}{\text{שניה}}$ או $\frac{rad}{\sec}$.
המהירות הקוית תלויה ב R ואילו המהירות הזויתית אינה תלויה ב R .



באותה זוית θ אורכי הקשת (הדרך) שהגוף עבר שונים, ככל שהרדיוס גדול יותר אורך הקשת גדול יותר.
מהו הקשר בין המהירות הקוית והמהירות הזויתית?

המהירות הקוית ראינו $V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

והמהירות הזויתית היא $\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$

ראינו כי $\Delta S = R * \Delta \theta$

נחלק ב- Δt ונקבל $\frac{\Delta S}{\Delta t} = R * \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$

$$\boxed{V = R * \omega}$$

כאשר V מהירות קוית
R רדיוס
ω מהירות זויתית

המהירות הקוית (משיקית) גם אם היא קצובה (גודלה אינו משתנה) כיוונה משתנה וברגע שיש שינוי במהירות הרי שישנה תאוצה.

תאוצה קוית

התאוצה הזו נקראת תאוצה רדיאלית והיא פונה לכיוון מרכז המעגל מנוגד לרדיוס וקטור. את התאוצה הזו מסמנים ב- a_R .

והיא שווה ל $a_R = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$

זו הוכחה מורכבת שתלמד בפרק העוסק בכוחות.

נתייחס לתאוצה המשיקית בה המהירות המשיקית משתנה בגודלה וכיוון התאוצה המשיקית הוא בכיוון המהירות המשיקית.
באם גודלה של המהירות הקוית משתנה בזמן, כאן יש תאוצה משיקית והיא בכיוון המשיק, בדיוק כמו כיוון המהירות הקוית.
את התאוצה המשיקית מסמנים ב a_T.

והיא מוגדרת $a_T = \frac{\Delta V}{\Delta t}$

שתי התאוצות המשיקית והרדיאלית מאונכות זו לזו, ולכן אפשר למצוא את התאוצה השקולה על פי משפט פיתגורס. $a_a^2 = a_T^2 + a_R^2$

ואת הזוית ביניהן על פי $\tan\varphi = \frac{a_R}{a_T}$

הזוית φ משתנה בכל רגע בזמן התנועה.

תאוצה זויתית

כשם שיש תאוצה קוית כן יש תאוצה זויתית.
והיא מוגדרת כשינוי המהירות הזויתית בזמן. מסמנים ב α

מוגדרת $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ $\frac{rad}{\text{שנ}^2}$

נראה את הקשר בין תאוצה משיקית ותאוצה זויתית.

ראינו כי $V = R * \omega$ כלומר $\Delta V = R * \Delta\omega$

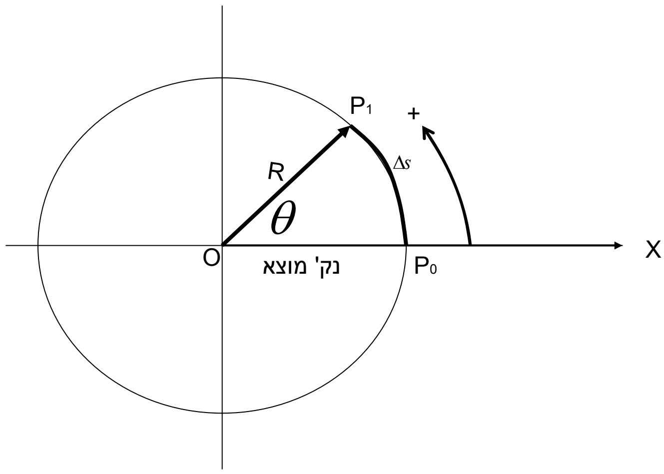
נחלק ב Δt ונקבל $\frac{\Delta V}{\Delta t} = R * \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

נציב את $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ ואת $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ כפי שראינו ונקבל

$$\boxed{a_T = R * \alpha}$$

תנועה מעגלית קצובה

תנועה מעגלית קצובה היא תנועה של גוף הנע על היקף של מעגל ברדיוס R במהירות משיקית קבועה, וכיוון המהירות משתנה בקצב קבוע.
ניקח את ציר ה- X כנק' מוצא והגוף מסתובב נגד כיוון השעון כחיובי.
הגוף נע מ P_0 ל P_1 ויוצר זוית θ.



אם נתבונן בתנועה מעגלית נראה כי לאחר שהגוף "עשה סיבוב שלם" 360^0 שזה 2π , הוא חוזר ומגיע לנק' ממנה יצא, ואם ימשיך לנוע ולהסתובב כל סיבוב הוא ישוב לנק' המוצא.

נגדיר: תדירות – מספר הסיבובים שהגוף מבצע ביחידת זמן (1 שניה).
את התדירות נמדוד בהרץ Hz (מס' סיבובים ב**<u>שניה</u>**) ונסמן באות f .
זמן מחזור – הזמן ב**שניות** שלוקח לגוף לבצע הקפה אחת מלאה.
את זמן המחזור נסמן באות T .
לדוגמא:גוף נע במהירות של 20 סיבובים בדקה.
התדירות היא $\frac{20}{60}$ סיבובים ב**שניה** וזה $\frac{1}{3}$Hz. כלומר "עושה" שליש סיבוב בשניה.
מכאן שסיבוב מלא הוא "עושה" במשך 3 שניות.

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{או} \quad f = \frac{1}{T}$$

התדירות בעצם אומרת לנו באם הגוף מסתובב מהר או לאט יותר.
בתנועה מעגלית קצובה המהירות המשיקית היא קבועה ולכן אפשר לאמר שהוא נע בתדירות קבועה.

סיבוב אחד מלא הגוף עושה בזמן T לכן המהירות המשיקית היא

ההיקף בזמן $V = \frac{2\pi * R}{T} = 2\pi R \frac{1}{T} = 2\pi R * f$

ראינו כי המהירות המשיקית $V = R * \omega$

מכאן נקבל $\omega = 2\pi f$

בתנועה מעגלית קצובה:

א. המהירות המשיקית והמהירות הזויתית הן קבועות.

ב. כאשר גוף "גדול" נע בתנועה מעגלית כל נק' בו נעה במהירות זויתית קבועה אולם המהירות המשיקית שונה בכל נק' (מרחקה מהמרכז שונה).

דוגמא 1: רדיוס של גלגל של מכונית מירוץ הוא 50ס"מ.והוא מסתובב 20 סיבובים בשניה. מה מהירות המכונית?

המהירות המשיקית של הגלגל היא גם מהירות המכונית.

נציב R=50 ס"מ ו f=20 Hz

$$V = 2\pi f * R = 2\pi * 20 * 50 = 6280 \frac{ס"מ}{שנ} = 62.8 \frac{מ}{שנ}$$

אם נהפוך זאת לקמ"ש נקבל $V = \frac{0.0628}{\frac{1}{3600}} = 216 \text{קמ"ש}$

דוגמא 2: מכונית נעה במעגל במהירות קבועה של 36קמ"ש ובקצב של 5 סיבובים בדקה.

חשב א. את זמן המחזור

ב. את התדירות f

ג. רדיוס הסיבוב

ד. את המהירות הזויתית

אם המכונית עושה 5 סיבובים בדקה אזי בשניה אחת היא עושה

א. $f = \frac{5}{60} = 0.0833 Hz$

ב. וזמן המחזור הוא $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.0833} = 12 \text{שנ}$

כלומר ב-12 שניות הוא עושה סיבוב אחד מלא.

ג. המהירות הזויתית $\omega = 2\pi f = 6.28 * 0.0833 = 0.523 \frac{rad}{שנ}$

ד. למציאת המהירות המשיקית נהפוך קמ"ש ל מ/שנ

$$36 \text{קמ"ש} = \frac{36000}{3600} = 10 \frac{מ}{שנ}$$

$$V = 10 = \omega R = 0.523 * R$$

ומכאן נמצא את R $R = \frac{10}{0.523} = 19.1 \text{מ}$